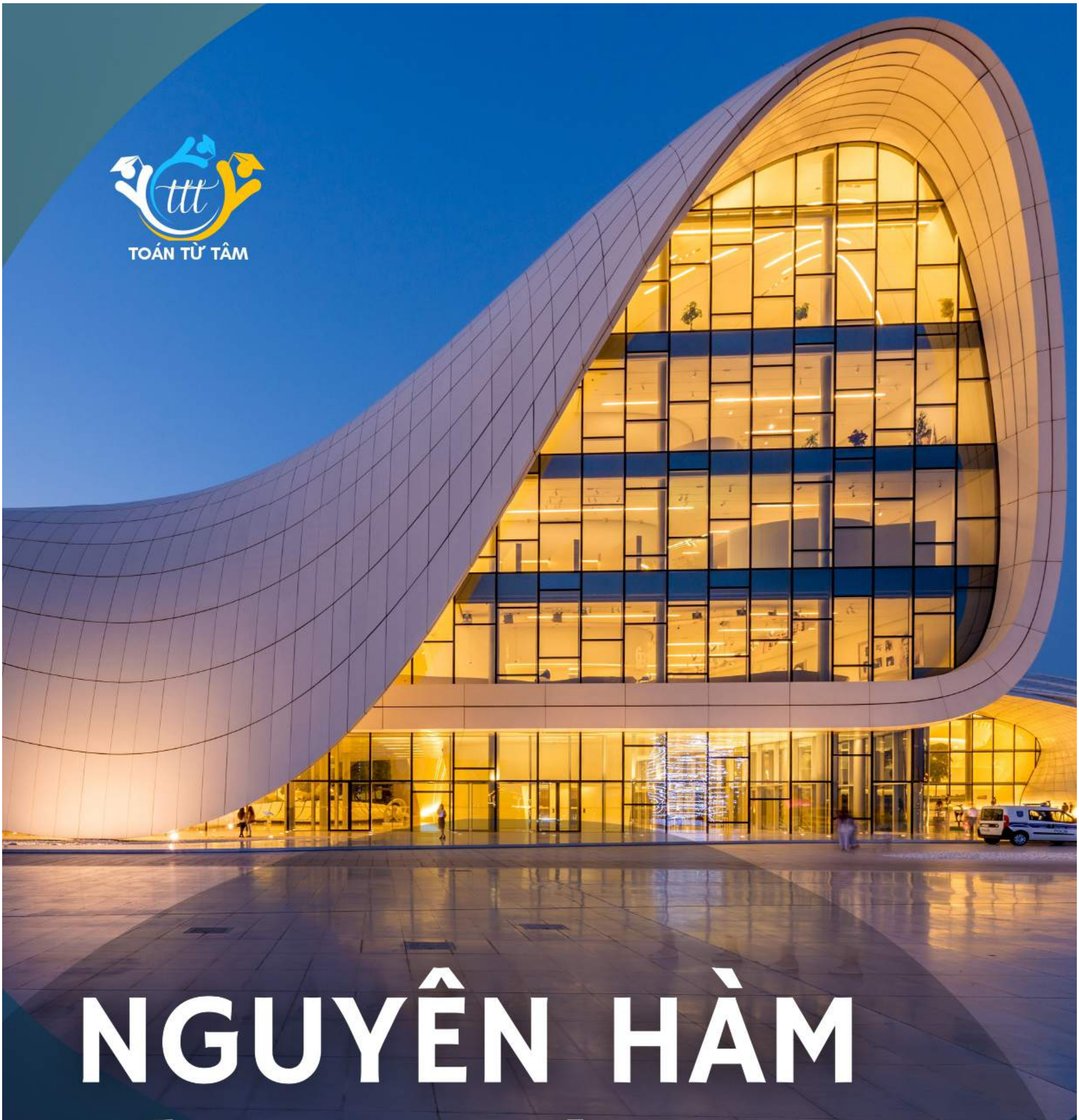
TOÁN TỪ TÂM



NGUYÊN HÀM TÍCH PHÂN

TÁC GIẢ
TOÁN TỪ TÂM

MỤC LỤC

Bài 1. **NGUYÊN HÀM**

A. Lý thuyết

1. Nguyên hàm 3
2. Nguyên hàm một số hàm số sơ cấp cơ bản 3
3. Tính chất 4

B. Các dạng bài tập

Dạng 1. Áp dụng định nghĩa 5
Dạng 2. Nguyên hàm hàm số lũy thừa 7
Dạng 3. Nguyên hàm hàm số lượng giác 9
Dạng 4. Nguyên hàm hàm số mũ 11
Dạng 5. Nguyên hàm có điều kiện 12
Dạng 6. Bài toán thực tế (liên quan đến vận tốc, gia tốc, quãng đường,…) 14

C. Luyện tập

A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm 16
B. Câu hỏi – Trả lời Đúng/sai 19
C. Câu hỏi – Trả lời ngắn 23

Bài 2. **TÍCH PHÂN**

A. Lý thuyết

1. Hình thang cong 24
2. Diện tích hình thang cong 24
3. Định nghĩa tích phân 25
4. Ý nghĩa hình học của tích phân 25
5. Tính chất tích phân 26

B. Các dạng bài tập

Dạng 1. Áp dụng định nghĩa – tính chất 27
Dạng 2. Tích phân hàm số chứa dấu trị tuyệt đối 30
Dạng 3. Tích phân hàm số cho bởi nhiều công thức 32
Dạng 4. Bài toán thực tế 34

C. Luyện tập

A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm 38
B. Câu hỏi – Trả lời Đúng/sai 40
C. Câu hỏi – Trả lời ngắn 44

Bài 3. **ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN**

A. Lý thuyết

1. Diện tích hình thang cong 46

2. Thể tích hình khối: 47

3. Thể tích khối tròn xoay: 47

B. Các dạng bài tập

Dạng 1. Xây dựng công thức tính diện tích theo hình vẽ 48

Dạng 2. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y=f(x)$, Ox và $x=a$, $x=b$ 50

Dạng 3. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y=f(x)$, $y=g(x)$ và $x=a$, $x=b$ 52

Dạng 4. Thể tích vật thể tính theo mặt cắt vuông góc trục hoành 55

Dạng 5. Thể tích khối tròn xoay 57

Dạng 6. Từ đồ thị tính diện tích hình phẳng 59

Dạng 7. Từ diện tích hình phẳng tính giá trị hàm 61

C. Luyện tập

A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm 63

B. Câu hỏi – Trả lời Đúng/sai 67

C. Câu hỏi – Trả lời ngắn 72

Chương 04
Bài 1.
NGUYÊN HÀM

A. Lý thuyết

1. Nguyên hàm

Định nghĩa:

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên K.

Hàm số $F(x)$ được gọi là ***nguyên hàm*** của hàm số $f(x)$ trên K nếu

$$F'(x) = f(x) \text{ với mọi } x \text{ thuộc } K.$$

Tổng quát, ta có:

Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K. Khi đó:

- » Với mỗi hằng số C, hàm số $F(x)+C$ cũng là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K.
- » Nếu $G(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K thì tồn tại hằng số C sao cho $G(x)=F(x)+C$ với mọi x thuộc K.

Như vậy, mọi nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K đều có dạng $F(x)+C$, với C là hằng số. Ta gọi $F(x)+C$, $C\in\mathbb{R}$ là họ tất cả các nguyên hàm của $f(x)$ trên K,

- » Kí hiệu $\int f(x)\mathrm{d}x$
- » Viết $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x)+C$

2. Nguyên hàm một số hàm số sơ cấp cơ bản

Nguyên hàm hàm sơ cấp

- Với $\alpha \neq -1$, ta có: $\int x^{\alpha}\mathrm{d}x = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$;
- $\int \sin x\mathrm{d}x = -\cos x + C$;
- $\int \cos x\mathrm{d}x = \sin x + C$;
- Với $a>0$, $a\neq 1$, ta có: $\int a^x\mathrm{d}x = \dfrac{a^x}{\ln a}+C$
- $\int \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x|+C$;
- $\int \dfrac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x = -\cot x + C$
- $\int \dfrac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \tan x + C$

3. Tính chất

Cho $f(x)$, $g(x)$ là hai hàm số liên tục trên K.

(1) $\int kf(x)\mathrm{d}x = k\int f(x)\mathrm{d}x$ với k là hằng số khác 0

(2) $\int\left[f(x)+g(x)\right]\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x + \int g(x)\mathrm{d}x$

(3) $\int\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x - \int g(x)\mathrm{d}x$

B Các dạng bài tập

Dạng 1. Áp dụng định nghĩa

Phương pháp

Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K. Khi đó:

» Với mỗi hằng số C, hàm số $F(x)+C$ cũng là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $f(x)$.

» Nếu $G(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $G(x)$ trên $f(x)$ thì tồn tại hằng số C sao cho $G(x)=F(x)+C\ \forall x\in K$.

Như vậy, mọi nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K đều có dạng $F(x)+C$, với $F(x)+C$ là hằng số.

Ta gọi $F(x)+C$, $C\in\mathbb{R}$ là họ tất cả các nguyên hàm của $f(x)$ trên K,

» Kí hiệu $\int f(x)\mathrm{d}x$

» Viết $\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$

Ví dụ 1.1.

Chứng minh $F(x)=2x^3-5x+4$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=6x-5$ trên $\mathbb{R}$.

Lời giải

....

....

....

....

Ví dụ 1.2.

Tìm $\int \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$ trên $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

Lời giải

....

....

....

....

....

Ví dụ 1.3.

Trong mỗi trường hợp sau, hàm số $F(x)$ có là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên khoảng tương ứng không? Vì sao?

(1) $F(x)=x\ln x$ và $f(x)=1+\ln x$ trên khoảng $(0;+\infty)$;

(2) $F(x)=e^{\sin x}$ và $f(x)=e^{\cos x}$ trên $\mathbb{R}$.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Dạng 2. Nguyên hàm hàm số lũy thừa

Phương pháp

(1) $\int 0\,dx = C$

(2) $\int dx = x + C$

(3) $\int x^{\alpha}dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \ (\alpha \neq -1)$

(4) $\int \dfrac{1}{x^2}dx = -\dfrac{1}{x} + C$

(5) $\int \dfrac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x} + C$

(6) $\int \dfrac{1}{x}dx = \ln|x| + C \ (x \neq 0)$

Ta có thể áp dụng ***lũy thừa với số mũ thực*** để biến đổi.

Cho a, b là những số thực dương, α, β là những số thực bất kì. Khi đó:

» $a^{\alpha}a^{\beta} = a^{\alpha+\beta}$ » $\dfrac{a^{\alpha}}{a^{\beta}} = a^{\alpha-\beta}$ » $\left(a^{\alpha}\right)^{\beta} = a^{\alpha.\beta}$ » $(ab)^{\alpha} = a^{\alpha}b^{\alpha}$ » $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\alpha} = \dfrac{a^{\alpha}}{b^{\alpha}}$

Ví dụ 2.1.

Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3 + x$ là

Lời giải

....

....

....

Ví dụ 2.2.

Nguyên hàm của các hàm số

(1) $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - 2x^2 + x - 2024$

(2) $f(x) = (x+1)(x+2)(x+3)$

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 2.3.

Nguyên hàm của các hàm số

(1) $\int \left(3\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)dx$

(2) $\int \sqrt{x}\left(7x^2 - 3\right)dx \ (x > 0)$

Lời giải

....
....
....
....
....

Dạng 3. Nguyên hàm hàm số lượng giác

Phương pháp

(1) $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$

(2) $\int \cos x\,dx = \sin x + C$

(3) $\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\cot x + C$

(4) $\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + C$

Ta có thể áp dụng *các công thức liên quan* để biến đổi.

01	*Công thức cơ bản*	① $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ ② $1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha},\ \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ③ $1 + \cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha},\ \alpha \neq k\pi$ ④ $\tan\alpha.\cot\alpha = 1,\ \alpha \neq \frac{k\pi}{2}$
02	*Công thức cộng*	① $\sin(a \pm b) = \sin a\cos b \pm \sin b\cos a$ ② $\cos(a \pm b) = \cos a\cos b \mp \sin a\sin b$ ③ $\tan(a \pm b) = \frac{\tan a \pm \tan b}{1 \mp \tan a\tan b}$
03	*Công thức nhân đôi*	① $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ ② $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$ ③ $\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha},\ \begin{cases} \alpha \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \\ \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}$
04	*Công thức hạ bậc*	① $\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$ ② $\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$ ③ $\tan^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha},\ \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$
05	*Công thức tích thành tổng*	① $\cos a\cos b = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) + \cos(a+b)\right]$ ② $\sin a\sin b = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right]$ ③ $\sin a\cos b = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b) + \sin(a-b)\right]$ ④ $\cos a\sin b = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b) - \sin(a-b)\right]$

Ví dụ 3.1.

Nguyên hàm của các hàm số

(1) $f(x)=1+\sin x$

(2) $f(x)=2\sin x+3x$

(3) $f(x)=\cos^2\dfrac{x}{2}$

(4) $f(x)=1-\dfrac{1}{\cos^2 x}$

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 3.2.

Tìm nguyên hàm $\int \sin 3x\cos 5x\mathrm{d}x$

Lời giải

....

....

....

Ví dụ 3.3.

Nguyên hàm của các hàm số

(1) $\int\left(\sin\dfrac{x}{2}-\cos\dfrac{x}{2}\right)^2\mathrm{d}x$

(2) $\int\left(x+\tan^2 x\right)\mathrm{d}x$

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Dạng 4. Nguyên hàm hàm số mũ

Phương pháp

(1) $\int e^x \mathrm{d}x = e^x + C$ (2) $\int a^x \mathrm{d}x = \dfrac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0,\ a \neq 1)$

Ta có thể áp dụng ***các công thức liên quan*** để biến đổi:

Cho α, β là những số thực dương, α, β là những số thực bất kì. Khi đó:

» $a^\alpha a^\beta = a^{\alpha+\beta}$ » $\dfrac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\alpha-\beta}$ » $\left(a^\alpha\right)^\beta = a^{\alpha.\beta}$ » $\left(\dfrac{a}{b}\right)^\alpha = \dfrac{a^\alpha}{b^\alpha}$ » $f(x) = x^3 + x$

Ví dụ 4.1.

Nguyên hàm của các hàm số

(1) $f(x) = \mathrm{e}^{2x-1}$ (2) $f(x) = 3^{-x}$ (3) $f(x) = 7^x.2^{x+2}$

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 4.2.

Nguyên hàm của các hàm số

(1) $\int \left(2^x + \dfrac{3}{x^2}\right)\mathrm{d}x$ (2) $\int \left(e^{x+1} - \dfrac{e}{x^2}\right)\mathrm{d}x$

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Dạng 5. Nguyên hàm có điều kiện

Phương pháp

Bài toán: Tìm nguyên hàm $F(x)$ của $f(x)$ thỏa $F(a)=b$

» ***Bước 1:*** Dựa vào bảng nguyên hàm, tính chất nguyên hàm, các phương pháp biến đổi.

» ***Bước 2:*** Dựa vào điều kiện của giả thiết: $F(a)=b$ để tìm C.

» ***Bước 3:*** Kết luận.

Ví dụ 5.1.

Cho hàm số $f'(x)=3x^2$. Tìm nguyên hàm $f(x)$ của $f'(x)$ thỏa $f(0)=1$.

Lời giải

....
....
....
....

Ví dụ 5.2.

Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=\sin x+\cos x$ thoả mãn $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=2$.

Lời giải

....
....
....
....

Ví dụ 5.3.

Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)=e^x+2x$ thỏa mãn $F(0)=\frac{3}{2}$. Tìm $F(x)$

Lời giải

....
....
....
....
....

Ví dụ 5.4.

Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)=\frac{1}{2x-1}, x\neq\frac{1}{2}$ và $F(1)=0$. Tính $F(5)$.

Lời giải

....

....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 5.5.

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(0;+\infty)$. Biết rằng $f'(x) = 2x + \frac{1}{x^2}$ với mọi $x \in (0;+\infty)$ và $f(1) = 1$. Tính giá trị $f(4)$.

Lời giải

....
....
....
....
....

Ví dụ 5.6.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = 12x + 2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $f(1) = 3$. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ thoả mãn $F(0) = 2$. Tính giá trị $F(1)$.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Dạng 6. Bài toán thực tế *(liên quan đến vận tốc, gia tốc, quãng đường,...)*

Phương pháp

Bài toán: Tìm nguyên hàm $F(x)$ của $f(x)$ thỏa C

» ***Bước 1:*** Xét mối liên hệ giữa các đại lượng

- Xét mối quan hệ giữa các đại lượng vận tốc $v(t)$, quãng đường $s(t)$ và thời gian t
  + Đạo hàm của quãng đường là vận tốc: $s'(t)=v(t)$
  + Nguyên hàm của vận tốc là quãng đường: $s(t)=\int v(t)dt$
- Xét mối quan hệ giữa các đại lượng vận tốc $v(t)$, gia tốc $a(t)$ và thời gian t
  + Đạo hàm của vận tốc là gia tốc: $v'(t)=a(t)$
  + Nguyên hàm của gia tốc là vận tốc: $v(t)=\int a(t)dt$

» ***Bước 2:*** Dựa vào điều kiện của giả thiết để tìm đại lượng yêu cầu.

» ***Bước 3:*** Kết luận.

Ví dụ 6.1.

Một ô tô đang chạy với vận tốc $19\ \text{m/s}$ thì hãm phanh và chuyển động chậm dần với tốc độ $v(t)=19-2t\ (\text{m/s})$. Kể từ khi hãm phanh, quãng đường ô tô đi được sau 5 giây là bao nhiêu?

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 6.2.

Một viên đạn được bắn thẳng đứng lên trên từ mặt đất. Giả sử tại thời điểm t giây (coi $t=0$ là thời điểm viên đạn được bắn lên), vận tốc của nó được cho bởi $v(t)=160-9,8t\ (m/s)$. Tìm độ cao của viên đạn (tính từ mặt đất):

(1) Sau $t=5$ giây.

(2) Khi nó đạt độ cao lớn nhất (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

C Luyện tập

A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm

» Câu 1. Hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên khoảng K nếu

A. $F'(x)=-f(x),\forall x\in K.$ **B.** $f'(x)=F(x),\forall x\in K.$

C. $F'(x)=f(x),\forall x\in K.$ **D.** $f'(x)=-F(x),\forall x\in K.$

» Câu 2. Cho hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng K. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. $F(x)=f'(x).$ **B.** $F'(x)=f(x).$

C. $\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)'=F'(x).$ **D.** $\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C.$

» Câu 3. Cho hai hàm số $f(x)$, $g(x)$ là hàm số liên tục, có $F(x)$, $G(x)$ lần lượt là nguyên hàm của $f(x)$, $g(x)$. Xét các mệnh đề sau:

(I). $F(x)+G(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)+g(x)$.

(II). $k.F(x)$ là một nguyên hàm của $k.f(x)$ với $k\in\mathbb{R}^*$.

(III). $F(x).G(x)$ là một nguyên hàm của $f(x).g(x)$.

Các mệnh đề đúng là

A. (I) và (II). **B.** Cả 3 mệnh đề. **C.** (I) và (III). **D.** (II) và (III).

» Câu 4. Cho $\int f(x)\mathrm{d}x=F_1(x)$, $\int g(x)\mathrm{d}x=F_2(x)$. Tính $I=\int\left[2g(x)-f(x)\right]\mathrm{d}x$.

A. $2F_1(x)-F_2(x)+C$. **B.** $F_2(x)-F_1(x)+C$.

C. $2F_2(x)-F_1(x)+C$. **D.** $\left|F_1(x)+F_2(x)\right|+C$.

» Câu 5. Cho $\int 5^x\mathrm{d}x=F(x)+C$. Khẳng định nào dưới đây **đúng**?

A. $F'(x)=5^x\ln 5$. **B.** $F'(x)=5^x+C$. **C.** $F'(x)=-5^x$. **D.** $F'(x)=5^x$.

» Câu 6. $\int x^4\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{1}{5}x^5+C$. **B.** $4x^3+C$. **C.** x^5+C. **D.** $5x^5+C$.

» Câu 7. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sqrt{2x-1}$.

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1}+C.$ **B.** $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1}+C..$

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=-\frac{1}{3}\sqrt{2x-1}+C.$ **D.** $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sqrt{2x-1}+C.$

» Câu 8. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=\cos 3x$

A. $\int\cos 3x\,\mathrm{d}x=3\sin 3x+C$ **B.** $\int\cos 3x\,\mathrm{d}x=\frac{\sin 3x}{3}+C$.

C. $\int\cos 3x\,\mathrm{d}x=\sin 3x+C$ **D.** $\int\cos 3x\,\mathrm{d}x=-\frac{\sin 3x}{3}+C$

» Câu 9. Hàm số $F(x)=e^{x^2}$ là nguyên hàm của hàm số nào trong các hàm số sau:

A. $f(x)=2xe^{x^2}$ **B.** $f(x)=x^2e^{x^2}-1$. **C.** $f(x)=e^{2x}$ **D.** $f(x)=\dfrac{e^{x^2}}{2x}$

» Câu 10. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{x^4+2}{x^2}$.

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{1}{x}+C$ **B.** $\int f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{2}{x}+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{1}{x}+C$ **D.** $\int f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{2}{x}+C$

» Câu 11. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $\int\left[f(x)+g(x)\right]\mathrm{d}x=\int f(x)\mathrm{d}x+\int g(x)\mathrm{d}x$. **B.** $\int\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x=\int f(x)\mathrm{d}x-\int g(x)\mathrm{d}x$.

C. $\int kf(x)\mathrm{d}x=k\int f(x)\mathrm{d}x, \forall k\in\mathbb{R}$. **D.** $\int kf(x)\mathrm{d}x=k\int f(x)\mathrm{d}x, \forall k\in\mathbb{R}, k\neq 0$.

» Câu 12. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\int\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2\mathrm{d}x=\dfrac{x^3}{3}-2x-\dfrac{1}{x}+C$. **B.** $\int\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2\mathrm{d}x=\dfrac{x^3}{3}-2x+\dfrac{1}{x}+C$.

C. $\int\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2\mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^3+C$. **D.** $\int\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2\mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^3\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)+C$.

» Câu 13. Hàm số $F(x)=x\sin x+\cos x+2024$ là một nguyên hàm của hàm số nào trong các hàm số sau?

A. $f(x)=x\sin x$. **B.** $f(x)=-x\cos x$. **C.** $f(x)=-x\sin x$. **D.** $f(x)=x\cos x$.

» Câu 14. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=3x^2+2x+5$ là

A. x^3+x^2+5. **B.** x^3+x+C. **C.** x^3+x^2+5x+C. **D.** x^3+x^2+C.

» Câu 15. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=(x+1)(x+2)$

A. $F(x)=\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{3}{2}x^2+2x+C$. **B.** $F(x)=\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{2}{3}x^2+2x+C$.

C. $F(x)=2x+3+C$. **D.** $F(x)=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{2}{3}x^2+2x+C$.

» Câu 16. Tìm nguyên hàm $\int\dfrac{\cos 2x}{\sin^2 x\cos^2 x}\mathrm{d}x$

A. $F(x)=-\cos x-\sin x+C$. **B.** $F(x)=\cos x+\sin x+C$

C. $F(x)=\cot x-\tan x+C$. **D.** $F(x)=-\cot x-\tan x+C$.

» Câu 17. Cho hàm số $f(x)=2x+e^x$. Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)$ thoả mãn $F(0)=2024$.

A. $F(x)=x^2+e^x+2023$. **B.** $F(x)=x^2+e^x-2023$.

C. $F(x)=x^2+e^x+2022$. **D.** $F(x)=x^2+e^x-2024$.

» Câu 18. Nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=\cos x$ thỏa mãn $F(0)=1$ là

A. $F(x)=\sin x+1$. **B.** $F(x)=-\sin x+1$. **C.** $F(x)=\cos x$. **D.** $F(x)=-\cos x+2$.

» **Câu 19.** Cho hàm số $f(x)=2x+e^x$. Hàm số $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ sao cho $F(0)=2024$. Tính $F(1)$.

A. $e+2025$. **B.** $e-2024$. **C.** $e+2024$. **D.** $e-2025$.

» **Câu 20.** Hàm số $F(x)=\sqrt[3]{x}+2\sqrt{x}+x\sqrt{x}$ là một nguyên hàm của hàm số nào dưới đây?

A. $f_1(x)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{3}{2}\sqrt{x}$. **B.** $f_3(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{3}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{3}{2}\sqrt{x}$.

C. $f_2(x)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{3}{2\sqrt{x}}$. **D.** $f_2(x)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}+\dfrac{1}{2}\sqrt{x}+\dfrac{3}{2\sqrt{x}}$.

» **Câu 21.** Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$, với $f(x)=\dfrac{x(x-3)^2}{x^2}$, biết $F(1)=\dfrac{5}{2}$. Tính $F(2)$.

A. $F(2)=2+9\ln 2$. **B.** $F(2)=-2+9\ln 2$.

C. $F(2)=1+9\ln 2$. **D.** $F(2)=7$.

» **Câu 22.** Cho hàm số $f(x)=3\cos x-\dfrac{2}{x}+\dfrac{4}{\sin^2 x}$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=3\sin x-2\ln|x|-4\cot x+C$. **B.** $\int f(x)\mathrm{d}x=3\sin x-2\ln x-4\cot x+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=3\sin x-2\ln|x|+4\cot x+C$. **D.** $\int f(x)\mathrm{d}x=-3\sin x-2\ln|x|-4\cot x+C$.

» **Câu 23.** Một vật chuyển động có gia tốc là $a(t)=3t^2+t$ (m/s^2). Biết rằng vận tốc ban đầu của vật là 2 m/s. Vận tốc của vật đó sau 2 giây là

A. 8 m/s. **B.** 12 m/s. **C.** 10 m/s. **D.** 16 m/s.

» **Câu 24.** Một viên đạn được bắn thẳng đứng lên trên từ mặt đất. Giả sử tại thời điểm t giây (coi $t=0$ là thời điểm viên đạn được bắn lên), vận tốc của nó được cho bởi $v(t)=25-9,8t$ (m/s). Độ cao của viên đạn (tính từ mặt đất) đạt giá trị lớn nhất là

A. $\dfrac{125}{49}$. **B.** $\dfrac{3125}{98}$. **C.** $\dfrac{2375}{392}$. **D.** $\dfrac{1125}{98}$.

» **Câu 25.** Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị là (C). Xét điểm $M(x;f(x))$ thay đổi trên (C). Biết rằng, hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị (C) tại M là $k_M=(x+2)^2$ và điểm $A(0;1)$ thuộc đồ thị (C). Tìm biểu thức $f(x)$.

A. $f(x)=\dfrac{x^3}{3}+2x^2+4x$. **B.** $f(x)=x^3+2x^2+4x+1$.

C. $f(x)=\dfrac{x^3}{3}-2x^2+4x$. **D.** $f(x)=\dfrac{x^3}{3}+2x^2+4x+1$.

B. Câu hỏi – Trả lời Đúng/sai

» Câu 26. Trong mỗi trường hợp sau, hàm số $F(x)$ có là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên khoảng tương ứng không? Vì sao?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Hàm số $F(x)=\frac{1}{3}x^3$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=x^2$ trên $\mathbb{R}$		
(b)	Hàm số $F(x)=2\sin x-3\cos x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=2\cos x-3\sin x$ trên $\mathbb{R}$		
(c)	Hàm số $F(x)=e^{x^2}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=2xe^{x^2}$ trên $\mathbb{R}$		
(d)	Hàm số $F(x)=\left(4x^2-2x+1\right)\sqrt{2x-3}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{20x^2-30x+7}{\sqrt{2x-3}}$ trên khoảng $\left(\frac{3}{2};+\infty\right)$		

» Câu 27. Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx$, với $a,b\in\mathbb{R}$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Biết $a=b=1$, nguyên hàm của hàm số $f(x)$ là $\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}+C$.		
(b)	Biết $a=b=4$, nguyên hàm của hàm số $f(x)$ là x^4+2x^2+C.		
(c)	Biết $f(1)=6; f(2)=36$, nguyên hàm của hàm số $f(x)$ là x^4-x^2+C.		
(d)	Biết $f(1)=2; f(-2)=-52$, nguyên hàm của hàm số $f(x)$ là $2x^4-3x^2+C$.		

» Câu 28. Các khẳng định sau **đúng** hay **sai**?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$\int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)dx=\ln\lvert x\rvert+\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+C$		
(b)	$\int\frac{x^2-2x+1}{x}dx=\frac{x^2}{2}-2x+\ln\lvert x\rvert+C$		
(c)	$\int\left(\frac{2}{5-2x}+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)dx=\ln\lvert 5-2x\rvert+2\ln\lvert x\rvert-\frac{3}{x}+C$		
(d)	Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{x+1}{x-3}$ thỏa $F(4)=3$ thì $F(x)=x+4\ln\lvert x-3\rvert-1$		

» Câu 29. Cho hàm số $F(x)=\int\sqrt{x}\left(x^2-5x+1\right)dx=\frac{ax^3\sqrt{x}}{b}-ax^2\sqrt{x}+\frac{a}{c}x\sqrt{x}+C\,(x>0)$. Xét tính đúng-sai của các khẳng định sau:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$F(x)=\frac{2x^3\sqrt{x}}{7}-2x^2\sqrt{x}+\frac{2}{3}x\sqrt{x}+C$		
(b)	Tổng $a+b+c=12$		

(c)	Tích $a.b.c=42$		
(d)	$F(1)=\dfrac{2002}{21}$ thì $F(x)=\dfrac{2x^3\sqrt{x}}{7}-2x^2\sqrt{x}+\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}+2024$		

» Câu 30. Cho $I_1=\int\left(e^x+\dfrac{1}{x^2}\right)dx$ và $I_2=\int\left(e^{2x-1}-\dfrac{1}{x^2}\right)dx$. Mỗi khẳng định dưới đây đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$I_1=e^x-\dfrac{1}{x}+C$		
(b)	$I_2=\dfrac{e^{2x-1}}{2}+\ln\lvert x\rvert+C$		
(c)	$I_1+I_2=e^x+\dfrac{e^{2x-1}}{2}+C$		
(d)	Gọi $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)$, với $f(x)=e^x+\dfrac{1}{x^2}$. Nếu $F(1)=e$ thì $F(\ln 2)=1-\dfrac{1}{\ln 2}$.		

» Câu 31. Cho hàm số $f(x)=4\cos^2\dfrac{x}{2}$. Các khẳng định sau đây đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$\int f(x)dx=-2\sin x+C$		
(b)	Biết rằng $\int f(x)dx=ax+b\sin x+C, a,b\in\mathbb{Z}$, khi đó $a+b=4$.		
(c)	Nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)$ thỏa mãn $F(0)=1$ là $F(x)=2(x+\sin x)+1$.		
(d)	Nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)$ thỏa mãn $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$ là $F(x)=2(x+\sin x)-\pi$.		

» Câu 32. Cho hàm số $f(x)=2x-3\cos x$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$f(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $g(x)=2+3\sin x$		
(b)	Một nguyên hàm của hàm số $f(x)=2x-3\cos x$ là $h(x)=x^2+3\sin x+2024$		
(c)	Nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)$ thoả mãn điều kiện $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=3$ là $F(x)=x^2-3\sin x+6-\dfrac{\pi^2}{4}$		
(d)	$f(x)=2x-3\cos x$ là một nguyên hàm của hàm số $k(x).e^x$, họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $k'(x).e^x$ là $3\sin x+3\cos x+2x+C$		

» Câu 33. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)=8x^3+\sin x, \forall x\in\mathbb{R}$. Xét tính đúng, sai của các phát biểu sau:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Hàm số $y=f(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f'(x)$.		
(b)	Biết $f(0)=3$. Khi đó, $f(x)=2x^4-\cos x+3$.		
(c)	$\int f(x)\mathrm{d}x=\int(2x^4-\cos x+3)\mathrm{d}x=\frac{2}{5}x^5-\sin x+3x+C$, với C là hằng số.		
(d)	Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ thoả mãn $F(0)=2$. Khi đó, $F(1)=\frac{32}{5}-\sin 1$.		

» Câu 34. Biết $F(x)=3x^2+2x-\ln x+C, x\in(0;+\infty)$ là hàm của hàm số $f(x)$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$f(x)=6x+2-\frac{1}{x}, x\in(0;+\infty)$.		
(b)	$F(1)=3$.Khi đó $F(2)=14-\ln 2$		
(c)	$f(1)=1$		
(d)	Bất phương trình $f(x)+\frac{1}{x}-8<0$ có tập nghiệm là $(-\infty;1)$		

» Câu 35. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{x^2+1}{x}$ trên khoảng $(0;+\infty)$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$F(x)=\frac{x^2}{2}+\ln x+2025$		
(b)	Biết $F(1)=\frac{3}{2}$, khi đó $F(e)=\frac{e^2}{2}+1$		
(c)	$F(x)=f'(x), \forall x\in(0;+\infty)$		
(d)	Biết rằng đồ thị của hàm số $F(x)$ đi qua $M\left(e;\frac{e^2}{2}\right)$. Khi đó $F(1)=\frac{1}{2}$		

» Câu 36. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $(-\infty;0)$. Biết rằng $f'(x)=2x+\frac{1}{x^2}$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$f(1)=2$. Khi đó $f(x)=x^2-\frac{1}{x}+2$.		
(b)	$f(1)=0$. Phương trình $f(x)=0$ có hai nghiệm		
(c)	Đồ thị hàm số $y=f(x)$ đi qua điểm $M(-1;2)$. Khi đó $f(2)=\frac{13}{2}$		
(d)	$f(-2)=\frac{1}{4}$. Hàm số $g(x)=xf(x)$ có 3 điểm cực trị.		

» Câu 37. Cho hàm số $f(x)$, biết $f'(x)=\frac{x+1}{x^2}$, biết $f(-2)=\frac{3}{2}$ và $f(2)=2\ln 2-\frac{3}{2}$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng ? Khẳng định nào sai ?

	Mệnh đề	Đúng	Sai

(a)	Hàm số $f(x)=\ln\|x\|-\frac{1}{x}+C$, với C là hằng số.		
(b)	Hàm số $f(x)=\begin{cases}\ln x-\frac{1}{x}+C_1, & \text{khi } x>0\\ \ln(-x)-\frac{1}{x}+C_2, & \text{khi } x<0\end{cases}$, với C_1, C_2 là hằng số.		
(c)	Giá trị $f(-1)=2-\ln 2$		
(d)	Giá trị $f(4)=3\ln 2$		

» Câu 38. Một vật chuyển động đều với vận tốc có phương trình $v(t)=t^2-2t+1$, trong đó t được tính bằng giây , quãng đường $s(t)$ được tính bằng mét. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng ? Khẳng định nào sai ?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Quãng đường đi được của vật sau 2 giây là: $\frac{2}{3}(m)$		
(b)	Quãng đường vật đi được khi gia tốc bị triệt tiêu là $\frac{1}{3}(m)$		
(c)	Quãng đường vật đi được trong khoảng từ 2 giây đến thời gian mà vận tốc đạt $9(m/s)$ là: $\frac{26}{3}$ (m)		
(d)	Quãng đường vật đi được từ 0 giây đến thời gian mà gia tốc bằng $10(m/s^2)$ là $44(m)$		

» Câu 39. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị là (C). Xét điểm $M(x;f(x))$ thay đổi trên (C). Biết rằng, hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị (C) tại M là $k_M=3x^2+2x-2$ và điểm M trùng với gốc tọa độ khi nó nằm trên trục tung.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có hoành độ $x=-1$ là $k=-1$.		
(b)	$f(1)=0$		
(c)	Điểm $B(2;7)$ thuộc đồ thị hàm số $y=f(x)$.		
(d)	Hàm số $F(x)=\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-x^2+1$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$.		

» Câu 40. Một ô tô đang chạy với tốc độ 72 *km/h* thì người lái xe bất ngờ phát hiện chướng ngại vật trên đường. Người lái xe phản ứng một giây sau đó bằng cách đạp phanh khẩn cấp. Kể từ thời điểm này, ô tô chuyển động chậm dần đều với tốc độ $v(t)=-10t+30$ (m/s), trong đó t là thời gian tính bằng giây kể từ lúc đạp phanh. Gọi $s(t)$ là quãng đường xe ô tô đi được trong t (s) kể từ lúc đạp phanh.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Công thức biểu diễn hàm số $s(t)=-5t^2+30t+72$ (m)		
(b)	Thời gian kể từ lúc đạp phanh đến khi xe ô tô dừng hẳn là 3 giây		

(c)	Sau 3 giây kể từ lúc đạp phanh, quãng đường xe ô tô di chuyển được là $45\ (m)$		
(d)	Quãng đường xe ô tô đã di chuyển kể từ lúc người lái xe phát hiện chướng ngại vật trên đường đến khi xe ô tô dừng hẳn là $120\ (m)$		

C. Câu hỏi – Trả lời ngắn

» Câu 41. Cho $F(x)$ là họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sin x-\cos x+\dfrac{2}{\cos^2 x}$, $F(0)=1$. Giá trị $F(\pi)$ bằng

Điền đáp số: ☐

» Câu 42. Cho $F(x)$ là họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=e^x-2x+1$, $F(0)=2$. Tính giá trị $F(1)$ (*làm tròn kết quả đến số thập phân thứ hai*)

Điền đáp số: ☐

» Câu 43. Cho hàm số $f(x)$ có nguyên hàm trên $\mathbb{R}$, và thỏa mãn $\int f(3+x)dx=e^x+\ln(x^2+1)$. Tính $f(-2)$(kết quả làm tròn đến hai chữ số sau dấu phẩy)

Điền đáp số: ☐

» Câu 44. Cho $F(x)=(ax^2+bx+c)e^{-x}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=(x^2-3x+2)e^{-x}$. Tính tổng $S=a+2b-c$?

Điền đáp số: ☐

» Câu 45. Cây cà chua khi trồng có chiều cao $5\ cm$. Tốc độ tăng chiều cao của cây cà chua sau khi trồng được cho bởi hàm số: $v(t)=-0{,}1t^3+t^2$, trong đó t tính theo tuần, $v(t)$ tính bằng centimét/tuần. Gọi $h(t)$ là độ cao của cây cà chua ở tuần thứ t. Chiều cao cây cà chua sau 2 tuần là bao nhiêu? *Làm tròn kết quả đến số thập phân thứ 2*

Điền đáp số: ☐

» Câu 46. Khi được thả từ độ cao 20 m, một vật rơi với gia tốc không đổi $a=10m/s^2$. Sau khi rơi được t giây thì vật có tốc độ bao nhiêu?

Điền đáp số: ☐

-------------------- Hết --------------------

Chương 04

Bài 2. TÍCH PHÂN

A. Lý thuyết

1. Hình thang cong

Định nghĩa:

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và *không âm* trên đoạn $[a;b]$.

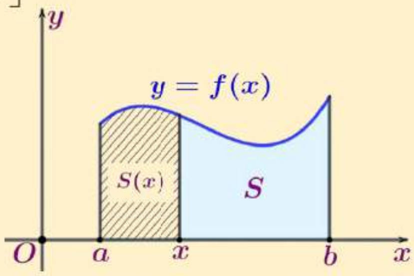
Hình phẳng giới hạn bởi:

» đồ thị hàm số $y = f(x)$,

» trục hoành,

» hai đường thẳng $x = a, x = b$

được gọi là hình thang cong.



2. Diện tích hình thang cong

Định nghĩa:

Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục và không âm trên đoạn $[a;b]$ thì diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi:

» đồ thị hàm số $y = f(x)$,

» trục hoành,

» hai đường thẳng $x = a, x = b$

được tính bởi:

$$S = F(b) - F(a)$$

✓ Trong đó $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$.

3. Định nghĩa tích phân

Định nghĩa:

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$.

Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$ thì hiệu số $F(b)-F(a)$ gọi là tích phân từ a đến b của hàm số $f(x)$, kí hiệu $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

✓ Viết $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)$

✓ Gọi $\int_a^b$ là dấu tích phân; a là cận dưới; b là cận trên,

$f(x)\mathrm{d}x$ là biểu thức dưới dấu tích phân,

$f(x)$ là hàm số dưới dấu tích phân

Chú ý

» Trường hợp $a=b$: $\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$

» Trường hợp $a>b$: $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$

» Tích phân không phụ thuộc vào biến số x hay t, nghĩa là $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.

4. Ý nghĩa hình học của tích phân

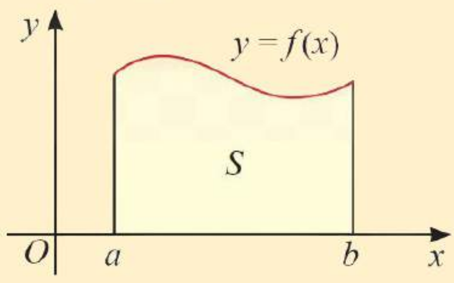
Định nghĩa:

Nếu hàm số $y=f(x)$ liên tục và không âm trên đoạn $[a;b]$ thì diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi:

» đồ thị hàm số $y=f(x)$,

» trục hoành,

» hai đường thẳng $x=a, x=b$



Vậy $S=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Chú ý

» Nếu hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ và $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ thì

$$\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x = f(b) - f(a)$$

» Tốc độ $v(t) \geq 0$ tại mọi thời điểm $t \in [a;b]$ thì quãng đường di chuyển trong khoảng thời gian từ a đến b được tính theo công thức:

$$s = s(b) - s(a) = \int_a^b v(t)\mathrm{d}t.$$

5. Tính chất tích phân

Tính chất:

(1) Cho hai hàm số $y = f(x), y = g(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Khi đó:

- $\int_a^b [f(x) + g(x)]\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$
- $\int_a^b [f(x) - g(x)]\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$

(2) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$, k là số thực. Khi đó:

- $\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

(3) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$, $c \in (a;b)$. Khi đó

- $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$

B Các dạng bài tập

Dạng 1. Áp dụng định nghĩa – tính chất

Phương pháp

☑ Áp dụng định nghĩa, tính chất và bảng công thức nguyên hàm cơ bản.

1	$\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$ (Tích phân có hai cận giống nhau thì bằng 0).
2	$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$ (Tích phân đảo cận $\to$ thêm dấu trừ).
3	$\int_a^b k.f(x)\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ với $k \in \mathbb{R}$.
4	$\int_a^b \left[f(x) \pm g(x)\right]\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.
5	Trong đoạn $[a;b]$, tồn tại $c \in [a;b]$ thì $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$.

☑ Ý nghĩa hình học của tích phân:

Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục và không âm trên đoạn $[a;b]$ thì diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi: đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành, hai đường thẳng $x = a, x = b$.

Vậy $S = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Ví dụ 1.1.

Cho $\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x = 5$ và $\int_0^3 g(x)\mathrm{d}x = 2$. Tính:

(1) $\int_0^3 \left[f(x) + g(x)\right]\mathrm{d}x$.

(2) $\int_0^3 \left[f(x) - g(x)\right]\mathrm{d}x$.

(3) $\int_0^3 3f(x)\mathrm{d}x$.

(4) $\int_0^3 \left[2f(x) - 3g(x)\right]\mathrm{d}x$

Lời giải

....

....

....

....

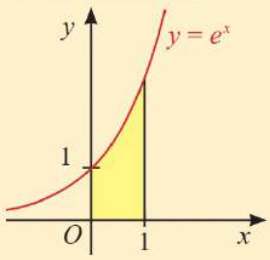
Ví dụ 1.2.

Cho $\int\limits_{-2}^{2} f(x)\mathrm{d}x = 1$, $\int\limits_{-2}^{4} f(t)\mathrm{d}t = -4$. Tính $\int\limits_{2}^{4} f(y)\mathrm{d}y$

Lời giải

Ví dụ 1.3.

Tính diện tích hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x) = e^x$, trục hoành, trục tung và đường thẳng $x = 1$.



Lời giải

Ví dụ 1.4.

Cho f, g là hai hàm liên tục trên đoạn $[1;3]$ thoả $\int\limits_{1}^{3}\left[f(x)+3g(x)\right]\mathrm{d}x = 10$, $\int\limits_{1}^{3}\left[2f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x = 6$. Tính $\int\limits_{1}^{3}\left[f(x)+g(x)\right]\mathrm{d}x$.

Lời giải

Ví dụ 1.5.

Cho số thực $a>1$, tính tích phân $\int_0^a |x-1|\,dx$ theo a.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....

Dạng 2. Tích phân hàm số chứa dấu trị tuyệt đối

Phương pháp

Cách 1:

→ Cho $f(x)=0$ tìm nghiệm $\in[a;b]$ giả sử các nghiệm đó là $x_1;x_2;...x_n\in[a;b]$

→ Khi đó $I=\int_a^{x_1}|f(x)|\mathrm{d}x+\int_{x_1}^{x_2}|f(x)|\mathrm{d}x+\int_{x_2}^{x_3}|f(x)|\mathrm{d}x+...+\int_{x_n}^{b}|f(x)|\mathrm{d}x$

$$\Leftrightarrow I=\left|\int_a^{x_1}f(x)\mathrm{d}x\right|+\left|\int_{x_1}^{x_2}f(x)\mathrm{d}x\right|+\left|\int_{x_2}^{x_3}f(x)\mathrm{d}x\right|+...+\left|\int_{x_n}^{b}f(x)\mathrm{d}x\right|$$

→ Tính mỗi tích phân thành phần

Cách 2:

→ Cho $f(x)=0$ tìm nghiệm $\in[a;b]$.

→ Xét dấu $f(x)$ trên $[a;b]$.

→ Áp dụng $|A|=\begin{cases}A & khi\ A>0\\ -A & khi\ A<0\end{cases}$ để phá trị tuyệt đối trong $\int_a^b ....$

→ Tính mỗi tích phân thành phần

Ví dụ 2.1.

Tính các tích phân sau:

(1) $A=\int_{-2}^{2}|x^2-1|\mathrm{d}x$.

(2) $B=\int_{-2}^{1}|x^3+x^2-2x|\mathrm{d}x$.

(3) $C=\int_{-1}^{2}|x^3-3x+2|\mathrm{d}x$.

(4) $D=\int_{-2}^{2}|x^4-3x^2-4|\mathrm{d}x$

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 2.2.

Tính các tích phân sau:

(1) $A=\int_{-3}^{5}\left(|x+2|-|x-2|\right)\mathrm{d}x$.

(2) $B=\int_{-1}^{2}\left(x+|1-x|-|x+2|\right)\mathrm{d}x$.

(3) $C=\int_{1}^{5}\frac{2|x-2|+1}{x}\mathrm{d}x$.

(4) $D=\int_{0}^{3}\sqrt{x^3-2x^2+x}\,\mathrm{d}x$

Lời giải

Dạng 3. Tích phân hàm số cho bởi nhiều công thức

Phương pháp

⌘ Bài toán 1:

Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} g(x) & \text{khi } x\le b \\ h(x) & \text{khi } x>b \end{cases}$ liên tục trên D. Tính $J=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x$.

Xét $b\in[a;c]$.

→ **Bước 1.** Kiểm tra hàm số $f(x)$ có liên tục tại $x=b$?

Tức là kiểm tra $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=\lim\limits_{x\to b^+} f(x)=f(b)\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to b^-} g(x)=\lim\limits_{x\to b^+} h(x)=f(b)$

→ **Bước 2.** Tách cận: $J=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x=\underbrace{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x}_{I_1}+\underbrace{\int_b^c h(x)\mathrm{d}x}_{I_2}$.

→ **Bước 3.** Tính các tích phân $I_1;I_2$ bằng các phương pháp đã học.

⌘ Bài toán 2:

Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} g(x;m) & \text{khi } x\le b \\ h(x;m) & \text{khi } x>b \end{cases}$ liên tục trên D. Tính $J=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x$.

Xét $b\in[a;c]$.

→ **Bước 1.** Kiểm tra hàm số $f(x)$ có liên tục tại $x=b$?

Tức là kiểm tra:

$\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=\lim\limits_{x\to b^+} f(x)=f(b)\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to b^-} g(x;m)=\lim\limits_{x\to b^+} h(x;m)=f(b)$

→ **Bước 2.** Tách cận: $J=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x=\underbrace{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x}_{I_1}+\underbrace{\int_b^c h(x)\mathrm{d}x}_{I_2}$.

→ **Bước 3.** Tính các tích phân $I_1;I_2$ bằng các phương pháp đã học.

Ví dụ 3.1.

Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & \text{khi } x\ge 2 \\ x^2-2x+3 & \text{khi } x<2 \end{cases}$. Tính tích phân $I=\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x$?

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 3.2.

Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}3x^2 & \text{khi } 0\le x\le 1\\ 4-x & \text{khi } 1\le x\le 2\end{cases}$. Tính tích phân $\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x$?

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 3.3.

Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}0,5x & \text{khi } 0\le x<2\\ 1 & \text{khi } 2\le x<15\\ 4-0,2x & \text{khi } 15\le x\le 20\end{cases}$. Tính $\int\limits_0^{20} f(x)\mathrm{d}x$.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 3.4.

Cho số thực a và hàm số $f(x)=\begin{cases}2x & \text{khi } x\le 0\\ a\left(x-x^2\right) & \text{khi } x>0\end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Tính $\int\limits_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x$

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....

Dạng 4. Bài toán thực tế

Phương pháp

- **Bài toán chuyển động của một vật**
  - Một vật chuyển động theo phương trình vận tốc $v(t)$ trong khoảng thời gian $t=a$ đến $t=b$ $(a<b)$ sẽ di chuyển được quãng đường là: $s=\int\limits_a^b v(t)dt$.
  - Một vật chuyển động có phương trình gia tốc $a(t)$ thì vận tốc của vật đó sau khoảng thời gian $\Delta t=t_2-t_1$ là: $v=\int\limits_{t_1}^{t_2} a(t)dx$.
- **Bài toán ứng dụng tích phân vào tìm các đại lượng vật lý như công, điện lượng,…**
  - Theo định luật Hooke, lực cần dùng để giữ lò xo giãn thêm x mét từ độ dài tự nhiên là $f(x)=kx$, với k (N/m) là độ cứng của lò xo. Công cần để kéo dãn lò xo từ độ dài ℓ_1 đến độ dài ℓ_2 là: $A=\int\limits_{\ell_1}^{\ell_2} f(x)dx$.
  - Điện lượng chuyển qua tiết diện của dây dẫn của đoạn mạch trong thời gian từ t_1 đến t_2 là: $Q=\int\limits_{t_1}^{t_2} I(t)dt$.

Ví dụ 4.1.

Một vật chuyển động với vận tốc $10m/s$ thì tăng tốc với gia tốc $a(t)=3t+t^2$. Tính quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian 10 giây kể từ lúc bắt đầu tăng tốc.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 4.2.

Một vật chuyển động dọc theo một đường thẳng sao cho vận tốc của nó tại thời điểm t (giây) là $v(t)=t^2-3t+2$ (m/s). Trong khoảng thời gian $1\le t\le 3$

(1) Tìm độ dịch chuyển của vật .

(2) Tìm tổng quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian này.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 4.3.

Một vật chuyển động dọc theo một đường thẳng sao cho vận tốc của nó tại thời điểm t (giây) là $v(t)=t^2-t-6$ (m/s). Trong khoảng thời gian $1\le t\le 4$

(1) Tìm độ dịch chuyển của vật .

(2) Tìm tổng quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian này.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 4.4.

Giả sử lợi nhuận biên (tính bằng triệu đồng) của một sản phẩm được mô hình hóa bằng công thức $P'(x)=-0,0002x+7,5$. Ở đây $P(x)$ là lợi nhuận (tính bằng triệu đồng) khi bán được x đơn vị sản phẩm.

(1) Tìm sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 50 lên 60 đơn vị sản phẩm.

(2) Tìm sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 100 lên 150 đơn vị sản phẩm.

Lời giải

....
....
....

....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 4.5.

Giả sử lợi nhuận biên (tính bằng triệu đồng) của một sản phẩm được mô hình hóa bằng công thức $P'(x) = -0,0005x + 12,2$. Ở đây $P(x)$ là lợi nhuận (tính bằng triệu đồng) khi bán được x đơn vị sản phẩm.

(1) Tìm sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 100 lên 101 đơn vị sản phẩm.

(2) Tìm sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 100 lên 110 đơn vị sản phẩm.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 4.6.

Giả sử vận tốc v của dòng máu ở khoảng cách r từ tâm của động mạch bán kính R không đổi, có thể được mô hình hóa bởi công thức bên dưới. Tìm vận tốc trung bình (đối với r) của động mạch trong khoảng $0 \le r \le R$. So sánh vận tốc trung bình với vận tốc lớn nhất.

(1) $v = \frac{k}{2}\left(\frac{4}{3}R^2 - r^2\right)$, trong đó k là một hằng số.

(2) $v = k\left(R^2 - r^2\right)$, trong đó k là một hằng số.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

C Luyện tập

A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm

» Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$. Chọn mệnh đề đúng.

A. $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$.
B. $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(a)-F(b)$.
C. $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)+F(a)$.
D. $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x=F^2(b)-F^2(a)$.

» Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$. Chọn mệnh đề **sai**.

A. $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$.
B. $\int\limits_a^a f(x)\mathrm{d}x=1$.
C. $\int\limits_a^a f(x)\mathrm{d}x=0$.
D. $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x=-\int\limits_b^a f(x)\mathrm{d}x$.

» Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ và $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$. Chọn mệnh đề đúng.

A. $f(b)-f(a)=\int\limits_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x$.
B. $F(b)-F(a)=\int\limits_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x$.
C. $f(b)-f(a)=\int\limits_a^b F(x)\,\mathrm{d}x$.
D. $f'(b)-f'(a)=\int\limits_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x$.

» Câu 4. Tính tích phân $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \cos t\,\mathrm{d}t$.

A. 2. **B.** 0. **C.** -2. **D.** 1.

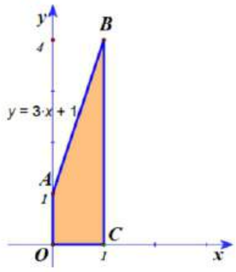
» Câu 5. Tính tích phân $\int\limits_e^a \frac{1}{t}\mathrm{d}t$ với $a>e$.

A. $\ln a+1$. **B.** $1-\ln a$. **C.** $\ln a-1$. **D.** $\ln a$.

» Câu 6. Nếu $\int\limits_1^3 f(x)\mathrm{d}x=2$ thì $\int\limits_1^3 [f(x)+2x]\mathrm{d}x$ bằng

A. 20. **B.** 18. **C.** 12. **D.** 10.

» Câu 7. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình thang $OABC$ giới hạn bởi $y=3x+1$, trục Ox và hai đường thẳng $x=0,x=1$ (như hình vẽ).



Khi đó $\int_0^1 (3x+1)\,dx$ bằng bao nhiêu?

A. $\frac{2}{5}$. **B.** $\frac{5}{2}$. **C.** $\frac{3}{2}$. **D.** 2.

» Câu 8. Cho $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = -1$ và $\int_{-2}^{2} g(x)\,dx = 3$. Mệnh đề nào say đây là **đúng**?

A. $\int_{-2}^{2} \left[f(x)+g(x)\right]dx = 8$. **B.** $\int_{-2}^{2} \left[f(x)-g(x)\right]dx = 4$.

C. $\int_{-2}^{2} 5f(x)\,dx = 5$. **D.** $\int_{-2}^{2} \left[3f(x)-4g(x)\right]dx = -15$.

» Câu 9. Tính $I = \int_{-1}^{0} (2x+3)^2\,dx$.

A. $I = \frac{13}{3}$. **B.** $I = \frac{14}{3}$. **C.** $I = -\frac{13}{3}$. **D.** $I = \frac{26}{3}$.

» Câu 10. Tích phân $\int_0^1 \left(e^{3x} + 5x^4\right)dx$ bằng

A. $e^3 + \frac{3}{2}$. **B.** e. **C.** $\frac{e^3+2}{3}$. **D.** e^3.

» Câu 11. Biết $F(x) = x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Giá trị của $\int_1^2 \left[2+f(x)\right]dx$ bằng

A. 3. **B.** 5. **C.** $\frac{13}{3}$. **D.** $\frac{7}{3}$.

» Câu 12. Cho $\int_0^1 f(x)\,dx = -1$; $\int_0^3 f(x)\,dx = 5$. Tính $\int_1^3 f(x)\,dx$

A. 3. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 4.

» Câu 13. Cho $\int_0^m \left(3x^2 - 2x + 1\right)dx = 6$. Giá trị của tham số m thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(-1;2)$. **B.** $(-\infty;0)$. **C.** $(0;4)$. **D.** $(-3;1)$.

» Câu 14. Cho $I = \int_0^1 \left(4x - 2m^2\right)dx$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để $I + 6 > 0$?

A. 1. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 3.

» Câu 15. Cho a là số thực dương, tính tích phân $I = \int_{-1}^{a} |x|\,dx$ theo a.

A. $I=\dfrac{a^2+1}{2}$. **B.** $I=\dfrac{a^2+2}{2}$. **C.** $I=\dfrac{-2a^2+1}{2}$. **D.** $I=\dfrac{\left|3a^2-1\right|}{2}$.

» Câu 16. Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=4$; $\int\limits_0^3 f(x)\mathrm{d}x=6$. Tính $I=\int\limits_{-1}^3 f(|u|)\mathrm{d}u$

A. 2. **B.** 5. **C.** 10. **D.** 12.

» Câu 17. Cho $f(x)=\begin{cases}1 & khi\ x\ge 1\\ 2x-1 & khi\, x<1\end{cases}$. Tính $J=\int\limits_{-1}^2 f(x)\mathrm{d}x$

A. -1 **B.** $\dfrac{1}{2}$ **C.** 4 **D.** 5

» Câu 18. Vận tốc của một vật chuyển động là $v(t)=3t^2+5\ (\mathrm{m/s})$. Quãng đường vật đó đi được từ giây thứ 4 đến giây thứ 10 là

A. 669 m. **B.** 696 m. **C.** 699 m. **D.** 966 m.

» Câu 19. Giả sử lợi nhuận biên (tính bằng triệu đồng) của một sản phẩm được mô hình hóa bằng công thức $P'(x)=-0,0004x+9,3$. Ở đây $P(x)$ là lợi nhuận (tính bằng triệu đồng) khi bán được x đơn vị sản phẩm. Khi đó sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 100 lên 125 đơn vị sản phẩm là

A. 232,325 triệu đồng. **B.** 230,315 triệu đồng.
C. 321,385 triệu đồng **D.** 231,375 triệu đồng.

» Câu 20. Giả sử vận tốc v của dòng máu ở khoảng cách r từ tâm của động mạch bán kính $R=9$, có thể được mô hình hóa bởi công thức $v=k(R^2-r^2)$, trong đó k là một hằng số. Tìm vận tốc trung bình (đối với r) của động mạch trong khoảng $0\le r\le R$.

A. $54k$. **B.** $45k$. **C.** $9k$. **D.** $27k$.

» Câu 21. Cho số thực a và hàm số $f(x)=\begin{cases}2x & khi\ x\le 0\\ a(x-x^2) & khi\ x>0\end{cases}$. Tính tích phân $\int\limits_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $\dfrac{a}{6}-1$. **B.** $\dfrac{2a}{3}+1$. **C.** $\dfrac{a}{6}+1$. **D.** $\dfrac{2a}{3}-1$.

» Câu 22. Một chiếc xe ô tô đang chạy trên đường cao tốc với vận tốc $72km/h$ thì tài xế bất ngờ đạp phanh làm cho chiếc ô tô chuyển động chậm với gia tốc $a(t)=-\dfrac{8}{5}t\ (m/s^2)$, trong đó t là thời gian tính bằng giây. Hỏi kể từ khi đạp phanh đến khi ô tô dừng hẳn thì ô tô di chuyển bao nhiêu mét (m)? (*Giả sử trên đường ô tô di chuyển không có gì bất thường*).

A. $50\ (m)$. **B.** $\dfrac{250}{3}\ (m)$. **C.** $\dfrac{200}{3}\ (m)$. **D.** $\dfrac{100}{3}\ (m)$.

B. *Câu hỏi – Trả lời Đúng/sai*

» Câu 23. Cho $\int\limits_{-3}^0 f(x)\mathrm{d}x=-4$ và $\int\limits_{-3}^0 g(x)\mathrm{d}x=-3$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$\int\limits_{-3}^0 [f(x)+g(x)]\mathrm{d}x=-7$		
(b)	$\int\limits_{-3}^0 [f(x)-g(x)]\mathrm{d}x=1$		

(c)	$\int_{-3}^{0} -3f(x)\,dx = 12$		
(d)	$\int_{-3}^{0} \left[2f(x)+3g(x)\right]dx = -51$		

» Câu 24. Tính $I=\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}(3-\sin x)\,dx = a\pi-\frac{b}{c}$ (trong đó $a,b,c\in\mathbb{N}^*$ và $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản). Trong các khẳng định dưới đây, khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$a^3+b^3-c=0$		
(b)	$a^2+b^2>c^2$		
(c)	$3a=2b+c$		
(d)	$c=a+b$		

» Câu 25. Cho hàm số $f(x)$ liên tục và không âm trên đoạn $[0;3]$. $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên đoạn $[0;3]$ thỏa $F(3)=2$ và $F(0)=1$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Hiệu số $F(3)-F(0)$ gọi là tích phân từ 3 đến 0 của hàm số $f(x)$.		
(b)	$\int_{0}^{3} f(x)\,dx = -\int_{3}^{0} f(x)\,dx = F(3)-F(0)$		
(c)	$\int_{0}^{3} f(t)\,dt = 1$		
(d)	Hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=0, x=3$ có diện tích bằng 1.		

» Câu 26. Cho hàm số $f(x)=6x^5$. Gọi $I=\int_{a}^{b} 6x^5\,dx$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Gọi $J=\int_{a}^{b} x^5\,dx$ thì ta có $J=6I$.		
(b)	Biết $\int_{a}^{b}\left(6x^5+x\right)dx = 8$ và $\int_{a}^{b} x\,dx = 3$ thì $I=\int_{a}^{b} 6x^5\,dx = 5$.		
(c)	Với $c\in[a;b]$, thì $\int_{a}^{b} 6x^5\,dx = \int_{a}^{c} 6x^5\,dx + \int_{c}^{b} 6x^5\,dx$		
(d)	$\int_{-1}^{1}\left\|6x^5\right\|dx = \int_{-1}^{0} 6x^5\,dx + \int_{0}^{1} 6x^5\,dx$		

» Câu 27. Cho $I=\int_{0}^{3}\left|x^2-2x\right|dx$.

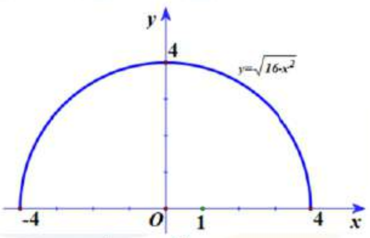
	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Ta có $\left\|x^2-2x\right\| = \begin{cases} x^2-2x, & 0\le x\le 2 \\ x^2-2x, & 2<x\le 3 \end{cases}$		

(b)	$I=\int_0^3\left\|x^2-2x\right\|\mathrm{d}x=\int_0^2\left\|x^2-2x\right\|\mathrm{d}x+\int_2^3\left\|x^2-2x\right\|\mathrm{d}x$		
(c)	$I=\int_0^3\left\|x^2-2x\right\|\mathrm{d}x=\int_0^2\left(x^2-2x\right)\mathrm{d}x+\int_2^3\left(x^2-2x\right)\mathrm{d}x$		
(d)	$I=\left.\left(-\frac{x^3}{3}+x^2\right)\right\|_0^2+\left.\left(\frac{x^3}{3}-x^2\right)\right\|_2^3$		

» Câu 28. Cho tích phân $I=\int_{-2}^{1}\left|4x-1\right|\mathrm{d}x$. Trong các khẳng định sau đây, khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Tích phân $I=\int_{-2}^{\frac{1}{4}}(4x-1)\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{4}}^{1}(4x-1)\mathrm{d}x$.		
(b)	Giá trị của tích phân $I=\frac{45}{4}$		
(c)	Tích phân $I=\left\|\int_{-2}^{1}(4x-1)\mathrm{d}x\right\|$		
(d)	Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị: $y=4x-1; y=0; x=-2; x=1$. Khi đó $S=\left\|I\right\|$		

» Câu 29. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đồ thị hàm số $y=\sqrt{16-x^2}$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?



	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$4\int_0^4\sqrt{16-x^2}\mathrm{d}x$ bằng diện tích hình tròn có bán kính bằng 4.		
(b)	$\int_{-4}^{0}\sqrt{16-x^2}\mathrm{d}x=-\int_0^4\sqrt{16-x^2}\mathrm{d}x$		
(c)	$\int_{-4}^{4}\sqrt{16-x^2}\mathrm{d}x=4\int_0^4\sqrt{16-x^2}\mathrm{d}x$		
(d)	$\int_{-4}^{4}\sqrt{16-x^2}\mathrm{d}x=8\pi$		

» Câu 30. Một chất điểm chuyển động trên đường thẳng nằm ngang (chiều dương hướng sang phải) với gia tốc phụ thuộc vào thời gian $t(\mathrm{s})$ là $a(t)=2t-7\ \left(\mathrm{m/s^2}\right)$. Biết vận tốc đầu bằng $6\ (\mathrm{m/s})$, xét tính đúng sai của các khẳng định sau.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t\left(\text{s}\right)$ xác định bởi $v\left(t\right)=t^2-7t+10$.		
(b)	Tại thời điểm $t=7$ (s), vận tốc của chất điểm là 6 (m/s).		
(c)	Độ dịch chuyển của vật trong khoảng thời gian $1\le t\le 7$ là 18 m.		
(d)	Trong 8 giây đầu tiên, thời điểm chất điểm xa nhất về phía bên phải là $t=7$ (s).		

» Câu 31. Giả sử lợi nhuận biên (tính bằng triệu đồng) của một sản phẩm được mô hình hóa bằng công thức $P'\left(x\right)=-0{,}0008x+10{,}4$. Ở đây $P\left(x\right)$ là lợi nhuận (tính bằng triệu đồng) khi bán được x đơn vị sản phẩm.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Lợi nhuận khi bán được x đơn vị sản phẩm được tính bằng công thức $P\left(x\right)=-0{,}0008x^2+10{,}4x$.		
(b)	Lợi nhuận khi bán được 50 sản phẩm đầu tiên là 519 triệu đồng.		
(c)	Sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 50 lên 55 đơn vị sản phẩm là $49{,}79$ triệu đồng.		
(d)	Biết sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 50 lên a đơn vị sản phẩm lớn hơn 517 triệu đồng, khi đó giá trị nhỏ nhất của a là 100.		

» Câu 32. Ở nhiệt độ $37°C$, một phản ứng hóa học từ chất đầu A, chuyển hóa thành chất sản phẩm B theo phương trình: $A\to B$. Giả sử $y\left(x\right)$ là nồng độ chất A (đơn vị mol L^{-1}) tại thời điểm x (giây), $y\left(x\right)>0$ với $x\ge 0$, thỏa mãn hệ thức: $y'\left(x\right)=-7.10^{-4}y\left(x\right)$ với $x\ge 0$. Biết rằng tại $x=0$, nồng độ (đầu) của A là $0{,}05$ mol L^{-1}. Xét hàm số $f\left(x\right)=\ln y\left(x\right)$ với $x\ge 0$. Khi đó, ta có

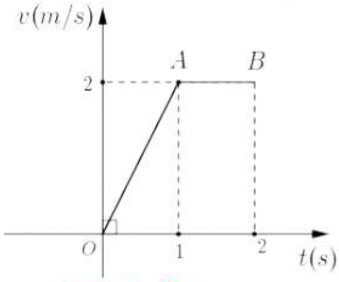
	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$f'\left(x\right)=-7.10^{-4}$		
(b)	$f\left(x\right)=-7.10^{-4}x+\ln\left(0{,}05\right)$		
(c)	$y\left(30\right)-y\left(15\right)=-6.10^{-4}$		
(d)	Nồng độ trung bình của chất A từ thời điểm 15 giây đến thời điểm 30 giây gần bằng $0{,}05$.		

» Câu 33. Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}3x^2+2x+m & \text{khi } x\ge 1\\ 5-2x & \text{khi } x<1\end{cases}$ (m là tham số thực) liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết rằng $f\left(x\right)$ có nguyên hàm trên $\mathbb{R}$ là $F\left(x\right)$ thỏa mãn $F\left(-2\right)=-10$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$m=-2$		
(b)	$F\left(x\right)=\begin{cases}x^3+x^2-2x+8 & \text{khi } x\ge 1\\ 5x-x^2+4 & \text{khi } x<1\end{cases}$		
(c)	$F\left(3\right)=83$		

(d)	$\int\limits_{1}^{e^2} f(\ln x)\frac{1}{x}\mathrm{d}x = 3$		

» Câu 34. Một vật chuyển động với vận tốc được cho bởi đồ thị trong hình sau:



	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Vận tốc của vật tại thời điểm t được xác định bởi $v(t)=\begin{cases}2t & \text{khi } 0\le t\le 1\\ 2 & \text{khi } t>1\end{cases}$.		
(b)	Quãng đường vật đi được trong 1 giây đầu tiên được xác định bởi công thức $s(t)=\int\limits_0^1 v(t)\mathrm{d}t$		
(c)	Quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian từ 1 giây đến 2 giây được xác định bởi công thức $s(t)=\int\limits_0^2 v(t)\mathrm{d}t$		
(d)	Quãng đường mà vật đi được trong 2 giây đầu tiên là $3m$.		

C. *Câu hỏi – Trả lời ngắn*

» Câu 35. Nếu $F'(x)=\frac{1}{2x}$ và $F(1)=1$ thì giá trị của $F(4)$ bằng bao nhiêu? *Làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ 2.*

Điền đáp số:

» Câu 36. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;2]$. Giả sử $y=F(x)$ là một nguyên hàm của $y=f(x)$ và $\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x=3$ và $F(0)=2$. Giá trị $F(2)$ bằng bao nhiêu?

Điền đáp số:

» Câu 37. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Giả sử $\int\limits_0^5 f(x)\mathrm{d}x=6$ và $\int\limits_2^5 f(x)\mathrm{d}x=8$. Giá trị $\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x$ bằng bao nhiêu?

Điền đáp số:

» Câu 38. Cho các hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Giả sử $\int\limits_2^7\left[2f(x)+3g(x)\right]\mathrm{d}x=1$ và $\int\limits_2^7\left[f(x)-2g(x)\right]\mathrm{d}x=4$. Khi đó, $\int\limits_2^7 f(x)\mathrm{d}x-3\int\limits_7^2 g(x)\mathrm{d}x$ bằng bao nhiêu?

Điền đáp số:

» Câu 39. Biết $F(x)=x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Giá trị của $\int_1^2\left[2+f(x)\right]dx$ bằng bao nhiêu?

Điền đáp số:

» Câu 40. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}x^2-1 & \text{khi } x\ge 2\\ x^2-2x+3 & \text{khi } x<2\end{cases}$. Tích phân $I=\frac{1}{2}\int_1^3 f(x)dx$ bằng bao nhiêu?

Làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ 2

Điền đáp số:

» Câu 41. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & khi\ x\ge 1\\ x+1 & khi\ x<1\end{cases}$. Tích phân $I=\int_2^0 -3t^2f(t)dt$ bằng bao nhiêu? *Làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ 2*

Điền đáp số:

» Câu 42. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}2x^2-1 & \text{khi } x<0\\ x-1 & \text{khi } 0\le x\le 2\\ 5-2x & \text{khi } x>2\end{cases}$. Tính tích phân $I=\int_{-5}^{9}\frac{1}{7}f(t)dt$ bằng bao nhiêu?

Làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ 2

Điền đáp số:

» Câu 43. Biết $I=\int_1^3\left|\frac{x^2-6x+8}{x+1}\right|dx=\frac{a}{b}+c\ln\frac{d}{e}$ biết a là số nguyên âm và $b,c,d,e\in\mathbb{Z}^*$; $(a,b)=1$, $(d,e)=1$. Giá trị của $a+b+c+d+e$ bằng:

Điền đáp số:

» Câu 44. Cho hàm số $y=f(x)=\begin{cases}e^x+1 & \text{khi } x\ge 0\\ x^2-2x+2 & \text{khi } x<0\end{cases}$. Biết giá trị của $I=\int_{1/e}^{e^2}\frac{f(\ln x-1)}{x}dx=\frac{a}{b}+ce$ với $a,b,c\in\mathbb{Z},b\ne 0$ và $(a,b)=1$ bằng. Giá trị của $a+b+c$

Điền đáp số:

» Câu 45. Một vật chuyển động dọc theo một đường thẳng sao cho vận tốc của nó tại thời điểm t (giây) là $v(t)=t^2-t-6$ (mét/giây). Quãng đường (mét) vật đi được trong khoảng thời gian $1\le t\le 4$ bằng (làm tròn tới hàng phần trăm)

Điền đáp số:

-------------------- Hết --------------------

Chương 04

Bài 3. ỨNG DỤNG HÌNH HỌC CỦA TÍCH PHÂN

A Lý thuyết

1. Diện tích hình thang cong

Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số, trục hoành, x=a và x=b

Hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$.

- *Trường hợp* $f(x)>0$ *trên* $[a;b]$,

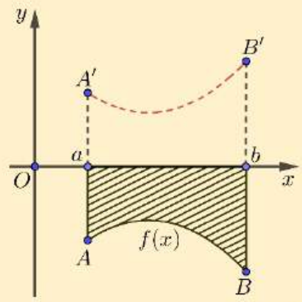
  Khi đó diện tích hình thang cong giới hạn bởi đồ thị $f(x)$, Ox và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$: $\boxed{S=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}$.

- *Trường hợp* $f(x)\le 0$ *trên* $[a;b]$, ta có $-f(x)\ge 0$

  S hình thang cong $aABb = S$ hình thang cong $aA'B'b$.

  ($aA'B'b$ *là hình đối xứng của hình thang đã cho qua trục hoành*).

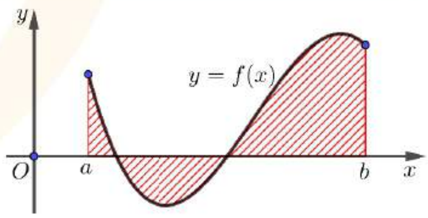
  Do đó: $S=S_{aABb}=S_{aA'B'b}=\boxed{\int_a^b(-f(x))\mathrm{d}x}$



⌘ Tổng quát:

Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x)$ liên tục, Ox và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ được tính:

$$\boxed{S=\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x}$$



Chú ý

» Giả sử hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[a;b]$. Nếu $f(x)$ không đổi dấu trên $[a;b]$ thì:

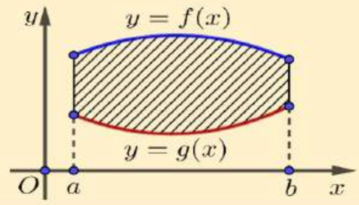
$$\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x=\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|$$

Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số, x=a và x=b

Cho hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số đó và đường thẳng $x=a$, $x=b$.

- *Xét trường hợp* $f(x)\ge g(x)\forall x\in[a;b]$

  Gọi S là diện tích hình thang cong giới hạn bởi $\begin{cases} Ox \\ x=a \\ x=b \end{cases}$ và $y=f(x); y=g(x)$.

  Khi đó diện tích: $\boxed{S=\int\limits_a^b |f(x)-g(x)|\mathrm{d}x}$.

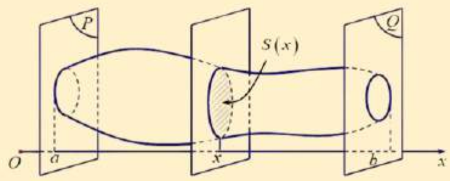
⌘ **Tổng quát:**

Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x)$ và $g(x)$ và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ được tính: $\boxed{S=\int\limits_a^b |f(x)-g(x)|\mathrm{d}x}$

2. Thể tích hình khối:

Định nghĩa

- Gọi B là phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại các điểm a và b, $S(x)$ là diện tích thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm x, $(a\le x\le b)$



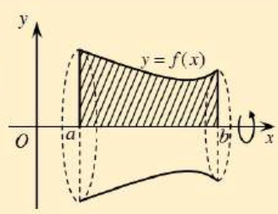
Giả sử $S(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a;b]$

Khi đó, thể tích của vật thể B được xác định: $\boxed{V=\int\limits_a^b S(x)\mathrm{d}x}$.

3. Thể tích khối tròn xoay:

Định nghĩa

- Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi $y=f(x)$, Ox, và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ quanh trục Ox: $\boxed{V=\pi\int\limits_a^b f^2(x)\mathrm{d}x}$



B. Các dạng bài tập

Dạng 1. Xây dựng công thức tính diện tích theo hình vẽ

Phương pháp

- *Xác định công thức diện tích hình phẳng:*

» **Bước 1:** Xác định đồ thị của các hàm số được cho trên hình vẽ.

» **Bước 2:** Xác định các vị trí tương giao giữa các đồ thị.

» **Bước 3:** Áp dụng công thức tính diện tích $S=\int_a^b \left|f(x)-g(x)\right| \mathrm{d}x$.

» **Bước 4:** Phá trị tuyệt đối: Lấy công thức hàm số của đồ thị nằm trên trừ công thức hàm số của đồ thị nằm dưới

- *Xác định công thức thể tích khối tròn xoay:*

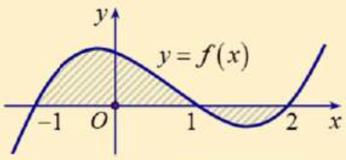
» **Bước 1:** Xác định đồ thị của các hàm số được cho trên hình vẽ.

» **Bước 2:** Xác định các vị trí tương giao giữa các đồ thị.

» **Bước 3:** Áp dụng công thức tính diện tích $V=\pi\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$.

Ví dụ 1.1.

Gọi S là diện tích miền hình phẳng được tô đậm trong hình vẽ bên. Xây dựng công thức tính S?



Lời giải

....

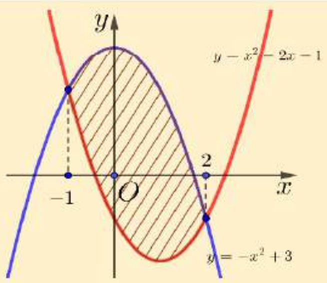
....

....

....

Ví dụ 1.2.

Cho đồ thị $y=f(x)$ như hình vẽ bên. Xác định công thức diện tích miền được gạch sọc ở hình bên.

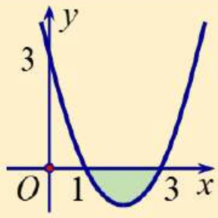


Lời giải

....
....
....
....

Ví dụ 1.3.

Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục và có đồ thị như hình bên. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số đã cho và trục Ox. Quay hình phẳng D quanh trục Ox ta được khối tròn xoay có thể tích V được xác định theo công thức gì?

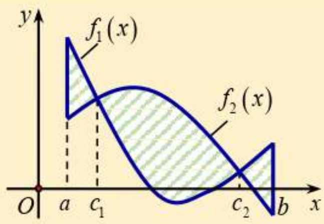


Lời giải

....
....
....
....

Ví dụ 1.4.

Cho hình phẳng $\left(H\right)$ giới hạn bởi đồ thị của hàm số $f_1\left(x\right)$ và $f_2\left(x\right)$ liên tục trên $\left[a;b\right]$ và đường thẳng $x=a$, $x=b$. Công thức tính diện tích của hình $\left(H\right)$ là?



Lời giải

....
....
....
....

Dạng 2. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi y=f(x), Ox và x=a, x=b

Phương pháp

⌘ ***Diện tích hình phẳng giới hạn:*** $\begin{cases} y = f(x) \\ Ox \\ x = a; x = b \end{cases} \to S = \int_a^b |f(x)| \mathrm{d}x$

Để phá bỏ dấu giá trị tuyệt đối ta thường làm như sau:

» **Bước 1:** Giải $f(x) = 0$ tìm nghiệm $x_1, x_2, ..., x_n \in (a;b)$ $(a < x_1 < x_2 < ... < x_n < b)$.

» **Bước 2:** Tính $S = \int_a^{x_1} |f(x)| \mathrm{d}x + \int_{x_1}^{x_2} |f(x)| \mathrm{d}x + ... + \int_{x_n}^{b} |f(x)| \mathrm{d}x$

$$= \left| \int_a^{x_1} f(x) \mathrm{d}x \right| + \left| \int_{x_1}^{x_2} f(x) \mathrm{d}x \right| + ... + \left| \int_{x_n}^{b} f(x) \mathrm{d}x \right|$$

⌘ ***Chú ý:*** Ngoài cách trên, ta có thể dựa vào đồ thị để bỏ dấu giá trị tuyệt đối.

Ví dụ 2.1.

Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2$, trục hoành Ox, các đường thẳng $x = 1$, $x = 2$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

....

....

....

Ví dụ 2.2.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = (x-2)^2 - 1$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1, x = 2$ bằng

Lời giải

....

....

....

Ví dụ 2.3.

Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi $y = x^2 - 2x$, $y = 0$, $x = -4$, $x = 1$

Lời giải

....

....

....

....

Ví dụ 2.4.

Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^3 - 1$, trục hoành, trục tung và đường thẳng $x = 2$.

Lời giải

....

....

....

....

Ví dụ 2.5.

Thể tích khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x}$, trục Ox và hai đường thẳng $x = 1$; $x = 4$ khi quay quanh trục hoành được tính bởi công thức nào?

Lời giải

....

....

....

....

Dạng 3. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi y=f(x), y=g(x) và x=a, x=b

Phương pháp

⌘ *Diện tích hình phẳng giới hạn:* $\begin{cases} y=f(x) \\ y=g(x) \\ x=a; x=b \end{cases} \rightarrow S=\int_a^b \left|f(x)-g(x)\right| \mathrm{d}x$

Để phá bỏ dấu giá trị tuyệt đối ta thường làm như sau:

» Bước 1: Giải $f(x)=g(x)$ tìm nghiệm $x_1, x_2, \ldots, x_n \in (a;b)$ $(a<x_1<x_2<\ldots<x_n<b)$.

» Bước 2: Tính $S=\int_a^{x_1}\left|f(x)-g(x)\right|\mathrm{d}x+\int_{x_1}^{x_2}\left|f(x)-g(x)\right|\mathrm{d}x+\ldots+\int_{x_n}^{b}\left|f(x)-g(x)\right|\mathrm{d}x$

$$=\left|\int_a^{x_1}\left(f(x)-g(x)\right)\mathrm{d}x\right|+\left|\int_{x_1}^{x_2}\left(f(x)-g(x)\right)\mathrm{d}x\right|+\ldots+\left|\int_{x_n}^{b}\left(f(x)-g(x)\right)\mathrm{d}x\right|$$

⌘ *Chú ý:* Ngoài cách trên, ta có thể dựa vào đồ thị để bỏ dấu giá trị tuyệt đối.

Ví dụ 3.1.

Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hàm số $y=x^4-4x^2+4$, $y=x^2$, đường thẳng $x=0$, $x=1$.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 3.2.

Hình phẳng giới hạn bởi các đường cong $y=x(1-x)$ và $y=x^3-x$ có diện tích bằng?

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 3.3.

Tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường:

(1) $y = e^x, y = x^2 - 1, x = -1, x = 1$;

(2) $y = \sin x, y = x, x = \frac{\pi}{2}, x = \pi$.

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 3.4.

Tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường:

(1) $y = e^x, y = x^2, x = 0, x = 1$;

(2) $y = \cos x, y = x + 1, x = \frac{\pi}{2}, x = \pi$.

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 3.5.

Tìm a để diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi $(P): y = \dfrac{x^2 - 2x}{x-1}$, đường thẳng $d: y = x - 1$ và $x = a$, $x = 2a$ $(a > 1)$ bằng $\ln 3$?

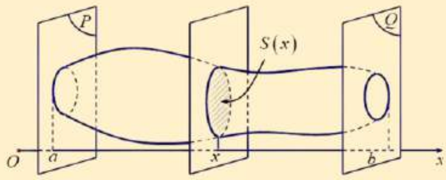
Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Dạng 4. Thể tích vật thể tính theo mặt cắt vuông góc trục hoành

Phương pháp

- Gọi B là phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại các điểm a và b, $S(x)$ là diện tích thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm x, $(a \le x \le b)$



Giả sử $S(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a;b]$

Khi đó, thể tích của vật thể B được xác định: $\boxed{V = \int_a^b S(x)\mathrm{d}x}$.

Ví dụ 4.1.

Tính thể tích V của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x=1$ và $x=3$, biết rằng khi cắt vật thể bởi mặt phẳng tùy ý vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(1 \le x \le 3)$ thì được thiết diện là một hình chữ nhật có hai cạnh là $3x$ và x^2

Lời giải

....

....

....

....

Ví dụ 4.2.

Tính thể tích V của vật thể nằm giữa hai mặt phẳng $x=0$ và $x=\pi$, biết rằng thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(0 \le x \le \pi)$ là một tam giác đều cạnh $2\sqrt{\sin x}$.

Lời giải

....

....

....

....

Ví dụ 4.3.

Cho phần vật thể $(\Im)$ giới hạn bởi hai mặt phẳng có phương trình $x=0$ và $x=2$. Cắt phần vật thể $(\Im)$ bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(0 \le x \le 2)$, ta được thiết diện là một tam giác đều có độ dài cạnh bằng $x\sqrt{2-x}$. Tính thể tích V của phần vật thể $(\Im)$.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 4.4.

Cho hình phẳng (H) được giới hạn bởi đường cong $y=\sqrt{m^2-x^2}$ (m là tham số khác 0) và trục hoành. Khi (H) quay xung quanh trục hoành được khối tròn xoay có thể tích V. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để $V<1000\pi$.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Dạng 5. Thể tích khối tròn xoay

Phương pháp

⌘ *Xoay miền hình phẳng giới hạn:* $\begin{cases} y = f(x) \\ Ox; x = a; x = b \end{cases}$ *quanh trục* Ox.

» **Bước 1:** Giải $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = c; c \in [a;b]$.

» **Bước 2:** Tính $V = \pi\int_a^b (f(x))^2 \, dx$

Ví dụ 5.1.

Tính thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường sau xung quanh trục Ox : $y = 2x - x^2, y = 0, x = 0, x = 2$.

Lời giải

....

....

....

Ví dụ 5.2.

Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{\tan x}$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$ quanh trục hoành là

Lời giải

....

....

....

Ví dụ 5.3.

Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường cong quay quanh trục hoành

(1) $y = \sqrt{2 + \sin x}$, Ox và $x = 0$, $x = \pi$. ;   (2) $y = x^2 + 3, y = 0, x = 0, x = 2$.

Lời giải

....

....

....

....

....

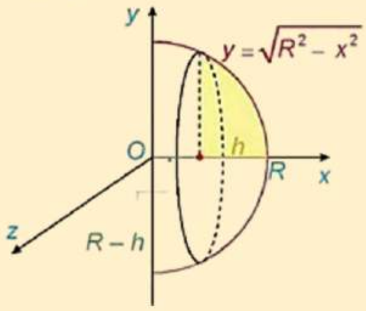
....

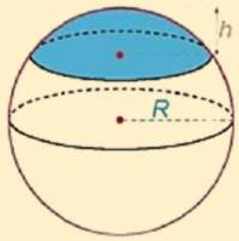
....

....

Ví dụ 5.4.

Khối chỏm cầu có bán kính R và chiều cao h $\left(0 < h \le R\right)$ sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi cung tròn có phương trình $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, trục hoành và hai đường thẳng $x = R - h$, $x = R$ xung quanh trục Ox. Tính thể tích của khối chỏm cầu này.





Lời giải

....

....

....

....

....

....

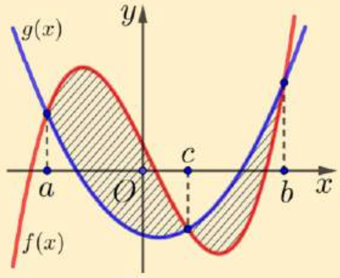
....

....

Dạng 6. Từ đồ thị tính diện tích hình phẳng

Phương pháp

- **Trường hợp 1:** $\begin{cases} y=f(x) \\ y=g(x) \end{cases} \rightarrow$ diện tích hình phẳng cần tìm là $S=\int_a^b |f(x)-g(x)|\mathrm{d}x$.



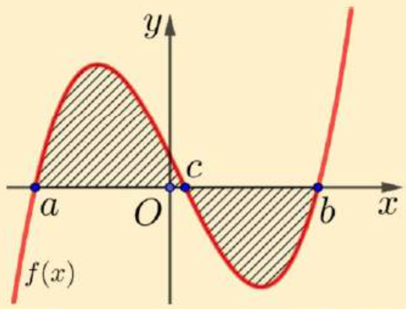
» **Bước 1:** Quan sát đồ thị thấy $f(x)-g(x)=0 \Leftrightarrow x=c; c\in[a;b]$.

» **Bước 2:** Xét hiệu $f(x)-g(x)$ trên các đoạn $[a;c];[c;b]$.

Giả sử trên $\begin{cases} [a;c]: f(x)-g(x)>0 \\ [c;b]: f(x)-g(x)<0 \end{cases}$.

» **Bước 3:** Khi đó $S=\int_a^b |f(x)-g(x)|\mathrm{d}x=\int_a^c (f(x)-g(x))\mathrm{d}x+\int_c^b (g(x)-f(x))\mathrm{d}x$

- **Trường hợp 2:** $\begin{cases} y=f(x) \\ Ox: y=0 \end{cases} \rightarrow$ diện tích hình phẳng cần tìm là $S=\int_a^b |f(x)-0|\mathrm{d}x$



» **Bước 1:** Quan sát đồ thị thấy $f(x)-0=0 \Leftrightarrow x=c; c\in[a;b]$.

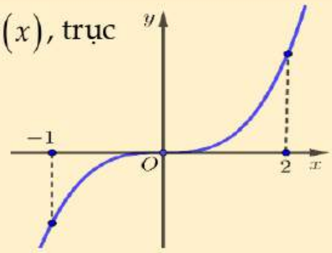
» **Bước 2:** Xét hiệu $f(x)-0$ trên các đoạn $[a;c];[c;b]$.

Giả sử trên $\begin{cases} [a;c]: f(x)-0>0 \\ [c;b]: f(x)-0<0 \end{cases}$.

» **Bước 3:** Khi đó $S=\int_a^b |f(x)-0|\mathrm{d}x=\int_a^c (f(x)-0)\mathrm{d}x+\int_c^b (0-f(x))\mathrm{d}x$.

Ví dụ 6.1.

Gọi S là diện tích hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -1$, $x = 2$. Đặt $a = \int_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x$, $b = \int_{0}^{2} f(x)\mathrm{d}x$, Khi đó tính S theo $a;b$.

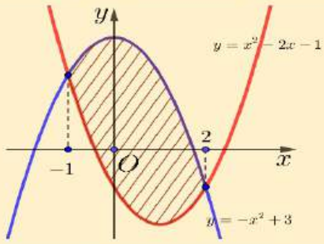


Lời giải

....
....
....
....

Ví dụ 6.2.

Cho các hàm số $y = x^2 - 2x - 1$ và $y = -x^2 + 3$ có đồ thị như hình vẽ bên. Xác định công thức và tính diện tích miền được gạch sọc ở hình bên.

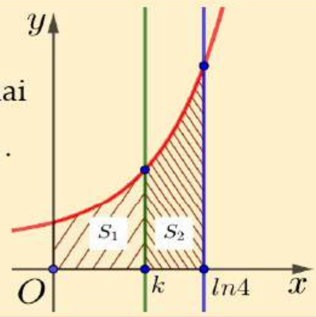


Lời giải

....
....
....
....

Ví dụ 6.3.

Cho hình thang cong (H) giới hạn bởi các đường $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \ln 4$. Đường thẳng $x = k\left(0 < k < \ln 4\right)$ chia (H) thành hai phần có diện tích là S_1 và S_2 như hình vẽ bên. Tìm k để $S_1 = 2S_2$.



Lời giải

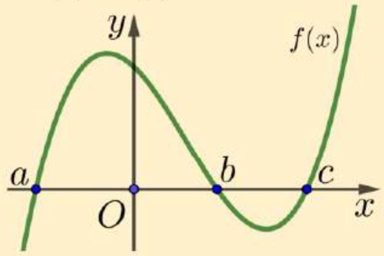
....
....
....
....

Dạng 7. Từ diện tích hình phẳng tính giá trị hàm

Phương pháp

Áp dụng định nghĩa tích phân: $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)$.

Thì lúc này đề bài yêu cầu so sánh $F(b);\ F(a)$.



Bài toán:

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục có đồ thị như hình. $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ trên $[a;c]$

So sánh $F(a);F(c);F(x_i)\ x_i\in[a;c]$.

» **Bước 1:** So sánh $F(a);F(b)$.

Trên $[a;b]: f(x)>0 \to \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b)-F(a)$

Mà $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x > 0 \Rightarrow F(b)-F(a)>0 \Leftrightarrow F(b)>F(a)$.

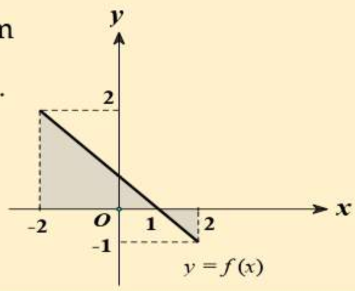
» **Bước 2:** Tương tự so sánh $F(b);F(c)$.

» **Bước 3:** Ta thấy diện tích hình phẳng giới hạn bởi $\begin{cases} y=f(x) \\ Ox \\ x=a;x=b \end{cases}$ lớn hơn $\begin{cases} y=f(x) \\ Ox \\ x=b;x=c \end{cases}$.

$$\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x > \int_b^c |f(x)|\mathrm{d}x \Rightarrow F(b)-F(a) > -F(c)+F(b) \Leftrightarrow -F(a) > -F(c) \to F(a)<F(c).$$

Ví dụ 7.1.

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục và có một nguyên hàm là $F(x)$ trên $[-2;1]$ đồng thời $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi các số sau: $F(2)-F(-2)$; $F(-2)-F(1)$; $F(2)-F(1)$; $F(2)-F(0)$ có bao nhiêu số dương?



Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

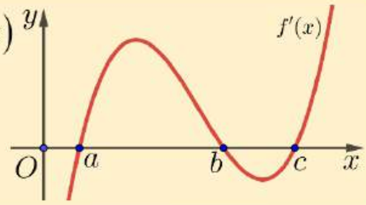
....

....

....

Ví dụ 7.2.

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như trong hình vẽ bên. Hãy so sánh các số $f(a); f(b); f(c)$.



Lời giải

....

....

....

....

....

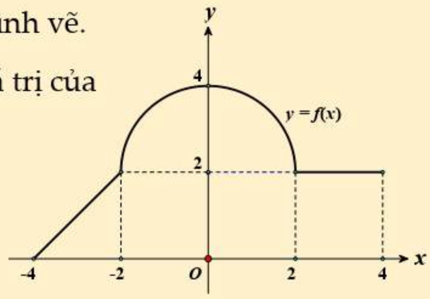
....

....

....

Ví dụ 7.3.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị trên đoạn $[-4;4]$ như hình vẽ. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$, tính giá trị của $S = F(4) - F(-4)$.



Lời giải

....

....

....

....

....

....

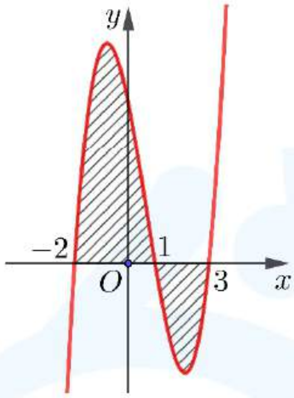
....

....

C Luyện tập

A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm

» Câu 1. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$, $y=0$, $x=-2$ và $x=3$ (như hình vẽ). Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?



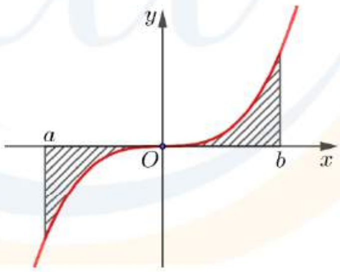
A. $S=-\int_{-2}^{1} f(x)\mathrm{d}x-\int_{1}^{3} f(x)\mathrm{d}x$.

B. $S=\int_{-2}^{1} f(x)\mathrm{d}x-\int_{1}^{3} f(x)\mathrm{d}x$.

C. $S=-\int_{-2}^{1} f(x)\mathrm{d}x+\int_{1}^{3} f(x)\mathrm{d}x$.

D. $S=\int_{-2}^{1} f(x)\mathrm{d}x+\int_{1}^{3} f(x)\mathrm{d}x$.

» Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Gọi D là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $(C): y=f(x)$, trục hoành, hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ (như hình vẽ dưới đây).



Giả sử S_D là diện tích hình phẳng D. Chọn công thức đúng trong các phương án A, B, C, D cho dưới đây?

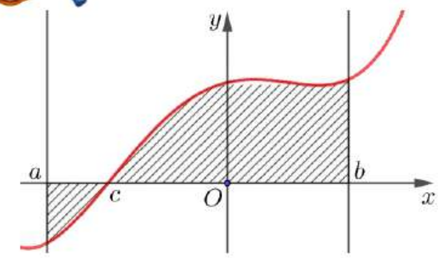
A. $S_D=\int_{a}^{0} f(x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{b} f(x)\mathrm{d}x$.

B. $S_D=-\int_{a}^{0} f(x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{b} f(x)\mathrm{d}x$.

C. $S_D=\int_{a}^{0} f(x)\mathrm{d}x-\int_{0}^{b} f(x)\mathrm{d}x$.

D. $S_D=-\int_{a}^{0} f(x)\mathrm{d}x-\int_{0}^{b} f(x)\mathrm{d}x$.

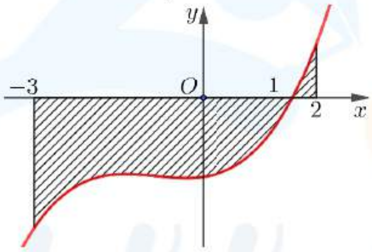
» Câu 3. Diện tích của hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ $(a<b)$ tính theo công thức nào dưới đây ?



A. $S=\int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$ **B.** $S=\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$

C. $S=-\int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$ **D.** $S=\left|\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|.$

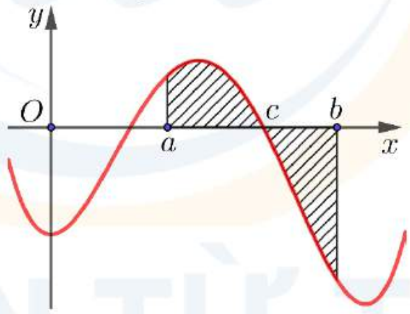
» Câu 4. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=-3,\ x=2$. Đặt $a=\int\limits_{-3}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x,\ b=\int\limits_{1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$.



Mệnh đề nào sau đây là **đúng**.

A. $S=a+b.$ **B.** $S=a-b.$ **C.** $S=-a-b.$ **D.** $S=b-a.$

» Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ có đồ thị như hình bên và $c\in[a;b]$. Gọi S là diện tích của hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$ và các đường thẳng $y=0,\ x=a,\ x=b$. Mệnh đề nào sau đây **sai?**



A. $S=\int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$. **B.** $S=\int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x-\int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

C. $S=\int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$. **D.** $S=\int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$.

» Câu 6. Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\sqrt[3]{x}$, trục hoành và hai đường thẳng $x=1,\ x=8$ là

A. $\frac{45}{2}$. **B.** $\frac{45}{4}$. **C.** $\frac{45}{7}$. **D.** $\frac{45}{8}$.

» Câu 7. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=(x-2)^2-1$, trục hoành và hai đường thẳng $x=1,x=2$ bằng

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{3}{2}$. **D.** $\frac{7}{3}$.

» Câu 8. Tính diện tích S hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^2+1, x=-1, x=2$ và trục hoành.

A. $S=16$. **B.** $S=6$. **C.** $S=\frac{13}{6}$. **D.** $S=13$.

» Câu 9. Gọi S là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=2^x$, $y=1$, $x=0$, $x=2$. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. $S=\int_0^2 |2^x-1| dx$. **B.** $S=\int_0^2 |1-2^x| dx$. **C.** $S=\int_0^2 (1-2^x) dx$. **D.** $S=\int_0^2 (2^x-1) dx$.

» Câu 10. Hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=4+2x-x^2$, $y=x^2$, $x=-1$, $x=2$ có diện tích là

A. 9 đvdt. **B.** 12 đvdt. **C.** 15 đvdt. **D.** 6 đvdt.

» Câu 11. Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y=x^2+1$, trục hoành và các đường thẳng $x=0, x=3$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng

A. $V=12\pi$. **B.** $V=\frac{348\pi}{5}$. **C.** $V=32\pi$. **D.** $V=9\pi$.

» Câu 12. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\cos x$, trục tung, trục hoành và đường thẳng $x=\pi$ bằng

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

» Câu 13. Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2$, trục hoành Ox, các đường thẳng $x=1$, $x=2$ là

A. $S=8$. **B.** $S=\frac{7}{3}$. **C.** $S=\frac{8}{3}$. **D.** $S=7$.

» Câu 14. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(0)<0<f(-1)$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$, $y=0$, $x=-1$ và $x=1$. Xét các mệnh đề sau

(1) $S=\int_{-1}^0 f(x)dx+\int_0^1 |f(x)|dx$. **(2)** $S=\int_{-1}^1 |f(x)|dx$.

(3) $S=\int_{-1}^1 f(x)dx$. **(4)** $S=\left|\int_{-1}^1 f(x)dx\right|$.

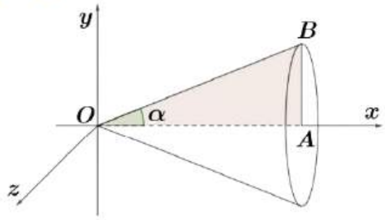
Số mệnh đề đúng là

A. 3. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 2.

» Câu 15. Khối chỏm cầu có bán kính $R=3$ và chiều cao $h=1$ sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi cung tròn có phương trình $y=\sqrt{9-x^2}$, trục hoành và hai đường thẳng $x=2$, $x=3$ xung quanh trục Ox. Tính thể tích khối chỏm cầu này.

A. $\frac{8\pi}{3}$. **B.** 2π. **C.** $\frac{10\pi}{3}$. **D.** π.

» Câu 16. Cho tam giác vuông OAB có cạnh $OA=a$ nằm trên tục Ox và $AOB=\frac{\pi}{3}$.



Gọi β là khối tròn xoay sinh ra khi quay miền tam giác OAB xung quanh trục Ox.

A. $3\pi a^3$. **B.** πa^3. **C.** $\dfrac{\pi a^3}{3}$. **D.** $\dfrac{\pi a^3}{9}$.

» Câu 17. Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích hình vuông cạnh bằng 1 và diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^2+1$, $y=0$, $x=-1$, $x=2$. Khẳng định nào sau đây đúng?

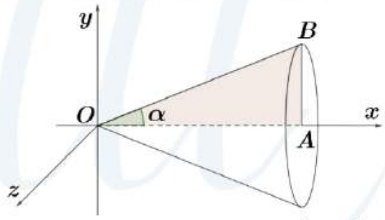
A. $S_1=S_2$. **B.** $S_1>S_2$. **C.** $2S_1=S_2$. **D.** $6S_1=S_2$.

» Câu 18. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^2+x-2$, $y=2x+4$, $x=1$ và $x=4$.

Cho diện tích hình phẳng (H) bằng $\dfrac{a}{b}$ (đvdt), với $a,b\in\mathbb{N}$ và $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Giá trị $T=a+b$ bằng:

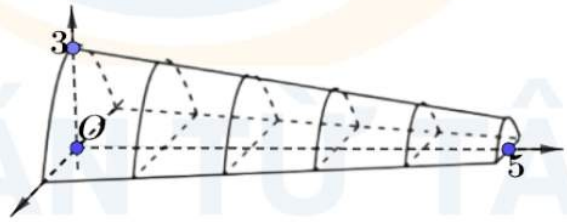
A. $T=67$. **B.** $T=25$. **C.** $T=76$. **D.** $T=23$.

» Câu 19. Cho tam giác vuông OAB có cạnh $OA=a$ nằm trên tục Ox và $AOB=\alpha\left(0<\alpha\le\dfrac{\pi}{4}\right)$. Gọi β là khối tròn xoay sinh ra khi quay miền tam giác OAB xung quanh trục Ox. Tính thể tích V của β theo a và α.



A. $\dfrac{\pi\tan^2\alpha.a^3}{3}$. **B.** $\dfrac{3\pi\tan^2\alpha.a^3}{2}$. **C.** $\dfrac{\pi\sin^2\alpha.a^3}{3}$. **D.** $\dfrac{2\pi\cos^2\alpha.a^3}{3}$.

» Câu 20. Cho một mô hình $3D$ mô phỏng một đường hầm như hình vẽ bên.



Chiều dài của đường hầm mô hình là 5cm, mặt phẳng vuông góc với mặt đáy của đường hầm tạo được thiết diện là một hình parabol, thiết diện có độ dài cạnh đáy gấp đôi chiều cao. Tính thể tích không gian bên trong đường hầm mô hình, biết chiều cao của mỗi thiết diện parabol cho bởi công thức $y=3-\dfrac{2}{5}x$ (đơn vị là cm), với x là khoảng cách tính từ lối vào lớn hơn của đường hầm mô hình. Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị.

A. 29. **B.** 30. **C.** 28. **D.** 31.

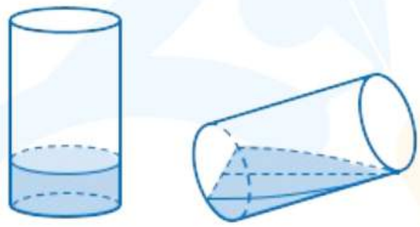
» Câu 21. Các nhà kinh tế sử dụng đường cong Lorenz để minh họa sự phân phối thu nhập trong một quốc gia. Gọi x là đại diện cho phần trăm số gia đình trong một quốc gia và y là phần trăm tổng thu nhập, mô hình $y = x$ sẽ đại diện cho một quốc gia mà các gia đình có thu nhập như nhau. Đường cong Lorenz $y = f(x)$, biểu thị sự phân phối thu nhập thực tế. Diện tích giữa hai mô hình này, với $0 \le x \le 100$, biểu thị "sự bất bình đẳng về thu nhập" của một quốc gia. Năm 2009, đường cong Lorenz của Hoa Kỳ có thể được mô hình hóa bởi hàm số

$$y = \left(0,00061x^2 + 0,0224x + 1,666\right)^2, 0 \le x \le 100,$$

Trong đó x được tính từ các gia đình nghèo nhất đến giàu có nhất. Sự bất bình đẳng về thu nhập của Hoa Kì vào năm 2009 có giá trị gần nhất với giá trị nào dưới đây?

A. 7922,9. **B.** 2922,9. **C.** 2085,5. **D.** 2077,1.

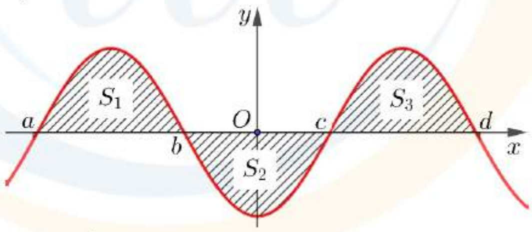
» Câu 22. Cho một cái cốc thủy tinh hình trụ bán kính đáy là 6 cm, chiều cao là 10 cm đang đựng một lượng nước. Tính thể tích lượng nước trong cốc, biết khi nghiêng cốc nước vừa lúc khi nước chạm miệng cốc thì ở đáy mực nước trùng với đường kính đáy?



A. 240 cm^3. **B.** 250 cm^3. **C.** 245 cm^3. **D.** 249 cm^3.

B. Câu hỏi – Trả lời Đúng/sai

» Câu 23. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a;d]$ và có đồ thị như hình vẽ. Biết đồ thị $f(x)$ cắt trục hoành tại 4 điểm a, b, c, d, đồng thời tạo với trục hoành và 2 đường thẳng $x = a, x = d$ thành một hình phẳng (H) gồm 3 phần có diện tích lần lượt là S_1, S_2, S_3 như hình vẽ.



Xét tính đúng, sai của 4 mệnh đề sau:

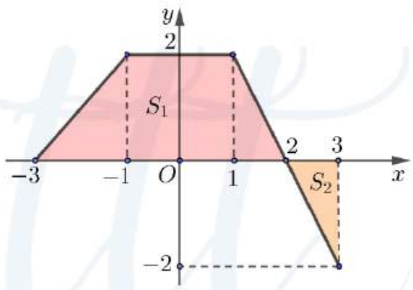
	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$S_1 = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$		
(b)	$S_2 = -\int_c^b \lvert f(x)\rvert \mathrm{d}x$		
(c)	$S_3 = -\int_c^d f(x)\mathrm{d}x$		
(d)	$S_{(H)} = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \int_b^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^d f(x)\mathrm{d}x$		

» Câu 24. Cho hai hàm số $f(x) = -x^2 + 4$ và $g(x) = x - 1$. Xét tính đúng, sai của các mệnh đề sau:

	Mệnh đề	Đúng	Sai

(a)	Diện tích hình phẳng (H_1) tạo bởi $f(x), Ox$ và hai đường thẳng $x=-3, x=3$ là $S_{(H_1)}=\int\limits_{-3}^{3}\left|f(x)\right|\mathrm{d}x=\dfrac{46}{3}$		
(b)	Diện tích hình phẳng (H_2) tạo bởi $f(x), Ox$ và hai đường thẳng $x=-2, x=2$ là $S_{(H_2)}=\int\limits_{-2}^{2}f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{32}{3}$		
(c)	Diện tích hình phẳng (H_3) tạo bởi $g(x), Ox$ và hai đường thẳng $x=-3, x=3$ là $S_{(H_3)}=\left|\int\limits_{-3}^{1}g(x)\mathrm{d}x+\int\limits_{1}^{3}g(x)\mathrm{d}x\right|=6$		
(d)	Diện tích hình phẳng (H_4) tạo bởi $g(x), Ox$ và hai đường thẳng $x=-3, x=3$ là $S_{(H_4)}=-\int\limits_{-3}^{1}g(x)\mathrm{d}x+\int\limits_{1}^{3}g(x)\mathrm{d}x=10$.		

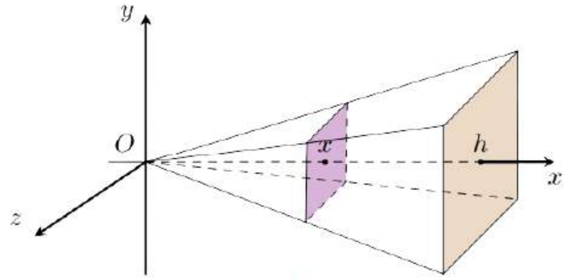
» Câu 25. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[-3;3]$ có đồ thị như hình vẽ, Biết rằng $f(x)$ tạo với trục hoành và 2 đường thẳng $x=-3, x=3$ một hình phẳng (H) gồm 2 phần có diện tích lần lượt là S_1, S_2.



Xét tính đúng, sai của 4 mệnh đề sau:

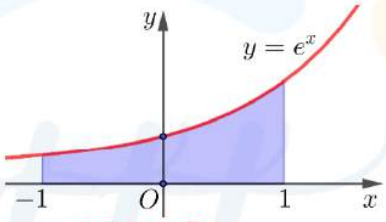
	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$S_{(H)}=\int\limits_{-3}^{3}f(x)\mathrm{d}x$		
(b)	$S_2=\left|\int\limits_{2}^{3}(-2x+4)\mathrm{d}x\right|=1$		
(c)	$S_1=\int\limits_{-3}^{-1}(x+3)\mathrm{d}x+\int\limits_{-1}^{1}2\mathrm{d}x+\int\limits_{1}^{2}(-2x+4)\mathrm{d}x$		
(d)	$S_{(H)}=S_1-\int\limits_{2}^{3}(-2x+4)\mathrm{d}x$		

» Câu 26. Cho khối chóp đều có đáy là hình vuông cạnh L và chiều cao là h. Chọn trục Ox sao cho gốc O trùng với đỉnh của khối chóp và trục đi qua tâm của đáy. (như hình dưới).



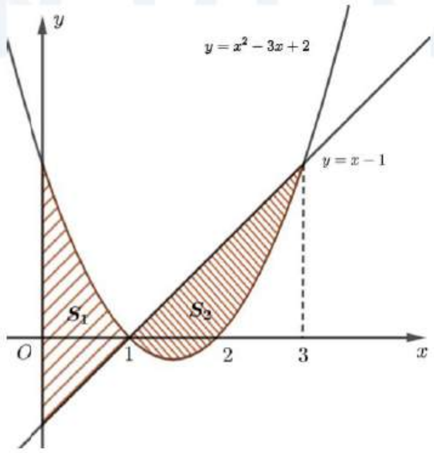
	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Đáy của khối chóp nằm trên mặt phẳng song song với Ox.		
(b)	Mỗi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ bằng $x\left(0\le x\le h\right)$, cắt khối chóp theo mặt cắt là hình vuông cạnh a.		
(c)	Diện tích mặt cắt là $S\left(x\right)=\dfrac{L}{h}x^2$.		
(d)	Thể tích của khối chóp là $V=\dfrac{1}{3}L^2h$.		

» Câu 27. Cho đồ thị hàm số $y=e^x$ và hình được tô màu như dưới.



	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Hình phẳng được tô màu giới hạn bởi 3 đường		
(b)	Diện tích hình phẳng được tính bởi công thức $S=\int\limits_{-1}^{1}\left(e^x\right)^2\mathrm{d}x$		
(c)	Diện tích hình phẳng $S=e-\dfrac{1}{e}$		
(d)	Thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng đó quanh trục Ox là $V=\dfrac{1}{2}\pi\left(e^2-\dfrac{1}{e^2}\right)$		

» Câu 28. Cho đồ thị hàm số $y=x^2-3x+2$ và $y=x-1$ và $S_1;S_2$ là phần diện tích phần được tô như trong hình dưới.



	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2-3x+2$ và $y=x-1$ là $\int_0^3\left(-x^2+4x-3\right)dx$		
(b)	$S_1=\frac{4}{3}$		
(c)	$S_1=S_2$		
(d)	Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2-3x+2$; $y=x-1$; $x=0$; $x=3$ là $\int_0^3\left(-x^2+4x-3\right)dx=1$.		

» Câu 29. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=-\sin x$, $y=1$, $x=a\left(0\le a\le\pi\right)$, $x=\pi$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Nếu $a=\pi$ thì diện tích của (H) bằng 0.		
(b)	Nếu $a=0$ thì diện tích của (H) bằng $\pi+2$.		
(c)	Nếu diện tích của hình (H) là $S=\pi-a+\frac{3}{2}$ thì $\frac{\pi}{a}$ là số nguyên chia hết cho 9.		
(d)	Nếu diện tích của hình (H) là S' thì $\int_a^{\pi}\sin x\,dx=S'-\pi-a$.		

» Câu 30. Trong mặt phẳng Oxy, cho hàm số $y=x+\sqrt{x}$ và $y=x+x^2$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Hoành độ giao điểm của đồ thị hai hàm số trên là $x=0$ hoặc $x=-1$		
(b)	Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số trên và $x=0$, $x=1$ được tính theo công thức $S=\int_0^1\left(\sqrt{x}-x^2\right)dx$		
(c)	Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số trên và $x=0$, $x=1$ được tính theo công thức $S=\int_0^1\left(x+x^2\right)dx-\int_0^1\left(x+\sqrt{x}\right)dx$		
(d)	Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số trên và $x=0$, $x=1$ bằng $\frac{1}{3}$ đvdt		

» Câu 31. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=x^2+3$, $y=0$, $x=0$, $x=2$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

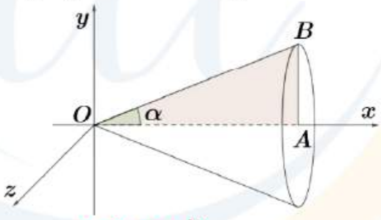
	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Công thức tính diện tích hình phẳng (H) là: $S_{(H)}=\int_0^2\left(x^2+3\right)dx$.		
(b)	Diện tích hình phẳng (H) bằng $\frac{26}{3}$.		

(c)	Công thức tính thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay hình phẳng (H) xung quanh trục Ox là: $V=\int_0^2\left(x^2+3\right)^2\mathrm{d}x$.		
(d)	Thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay hình phẳng (H) xung quanh trục Ox bằng $\dfrac{202}{5}$.		

» Câu 32. Khối chỏm cầu có bán kính $R=5$ và chiều cao $h=1$ sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi cung tròn có phương trình $y=\sqrt{25-x^2}$, trục hoành và hai đường thẳng $x=4$, $x=5$ xung quanh trục Ox.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Khoảng cách từ tâm của khối cầu đến khối chỏm cầu bằng 3.		
(b)	Thể tích của khối chỏm cầu V_1 được tính theo công thức $V_1=\pi\int_4^5\left(25-x^2\right)\mathrm{d}x$.		
(c)	Thể tích của khối chỏm cầu $V_1=\dfrac{14\pi}{3}$.		
(d)	Gọi V_2 là thể tích của nửa khối cầu có bán kính bằng 5. Tỉ số thể tích $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{7}{125}$.		

» Câu 33. Cho tam giác vuông OAB có cạnh $OA=a$ nằm trên tục Ox và $AOB=\alpha\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$. Gọi β là khối tròn xoay sinh ra khi quay miền tam giác OAB xung quanh trục Ox.



	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Khi $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$ thì thể tích V của khối β là $\dfrac{\pi a^3}{3}$ (đvtt).		
(b)	Khi $\alpha=\dfrac{\pi}{6}$ thì thể tích V của khối β là $\dfrac{\pi a^3}{9}$ (đvtt).		
(c)	Khi thể tích V của khối β là $\dfrac{4\pi a^3}{3}$ thì giá trị $\cos\alpha<\dfrac{1}{2}$.		
(d)	Khi $\tan\alpha=\cot\alpha$ thì thể tích V của khối β là $\dfrac{\pi a^3}{3}$.		

» Câu 34. Các nhà kinh tế sử dụng đường cong Lorenz để minh họa sự phân phối thu nhập trong một quốc gia. Gọi x là đại diện cho phần trăm số gia đình trong một quốc gia và y là phần trăm tổng thu nhập, mô hình $y=x$ sẽ đại diện cho một quốc gia mà các gia đình có thu nhập như nhau. Đường cong Lorenz $y=f(x)$, biểu thị sự phân phối thu nhập thực tế. Diện tích giữa hai mô hình này, với $0\le x\le 100$, biểu thị "sự bất bình đẳng về thu nhập" của một quốc gia. Năm 2005, đường cong Lorenz của Hoa Kỳ có thể được mô hình hóa bởi hàm số

$$y=\left(0,00061x^2+0,0218x+1,723\right)^2, 0\le x\le 100,$$

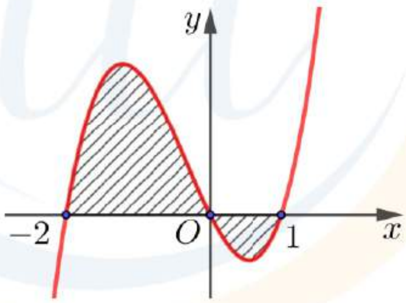
Trong đó x được tính từ các gia đình nghèo nhất đến giàu có nhất (*Theo R.Larson, Brief Calculus: An Applied Approach, 8th edition, Cengage Learning, 2009*)

Xét tính đúng/sai của các khẳng định sau:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Tính theo thứ tự từ các gia đình nghèo nhất đến giàu nhất, tổng thu nhập thực tế của 60% các gia đình đầu tiên chiếm chưa đến 30% so với tổng thu nhập của toàn bộ các gia đình.		
(b)	Nếu sắp xếp các gia đình theo thứ tự từ nghèo nhất đến giàu nhất, rồi chia thành 10 nhóm bằng nhau từ 1 đến 10, tổng thu nhập của các gia đình trong nhóm 3 chiếm khoảng $8,56\%$ tổng thu nhập của toàn bộ các gia đình.		
(c)	Sự bất bình đẳng về thu nhập của Hoa Kì năm 2005 được xác định bởi công thức: $\int_0^{100}\left[x-\left(0,00061x^2+0,0218x+1,723\right)^2\right]dx$		
(d)	Sự bất bình đẳng về thu nhập của Hoa Kỳ năm 2005 đã vượt quá 2000.		

C. Câu hỏi – Trả lời ngắn

» Câu 35. Đồ thị trong hình dưới đây là của hàm số $y=f(x)$.



Biết $\int_{-2}^{0}f(x)dx=3; \int_0^1 f(x)dx=-1$. Tính diện tích phần hình phẳng tô đậm trong hình.

Điền đáp số:

» Câu 36. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^3+2x+1$, trục hoành, $x=1$ và $x=2$.

Điền đáp số:

» Câu 37. Thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường: $y=3x+x^2$, $y=0; x=0; x=3$ quanh trục Ox bằng bao nhiêu (*làm tròn đến hàng đơn vị*)?

Điền đáp số:

» Câu 38. Khối chỏm cầu có bán kính $R=3$ và chiều cao $h=\frac{3}{2}$ sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi cung tròn có phương trình $y=\sqrt{9-x^2}$, trục hoành và hai đường thẳng $x=\frac{3}{2}$, $x=3$ xung quanh trục Ox. Tính thể tích khối chỏm cầu này (làm tròn kết quả đến hàng phần chục).

Điền đáp số:

» Câu 39. Tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường: $y=8-x^2$, $y=3x^2$, $x=-\sqrt{2}$, $x=\sqrt{2}$ *(kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ 2)*

Điền đáp số:

» Câu 40. Tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường: $y=\sqrt{2x}$, $y=\frac{x^2}{2}$, $x=0$, $x=2$ *(kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ 2)*

Điền đáp số:

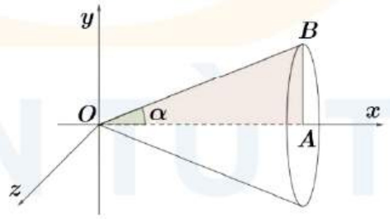
» Câu 41. Gọi (H) là phần hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị của các hàm số $y=3x^2$, $y=4-x$ và trục hoành. Diện tích của (H) là bằng bao nhiêu?

Điền đáp số:

» Câu 42. Cho (H) là hình phẳng được tô đậm trong hình vẽ và được giới hạn bởi các đường có phương trình $y=\frac{10}{3}x-x^2$, $y=\begin{cases}-x & \text{khi } x\le 1\\ x-2 & \text{khi } x>1\end{cases}$. Diện tích của (H) bằng bao nhiêu.

Điền đáp số:

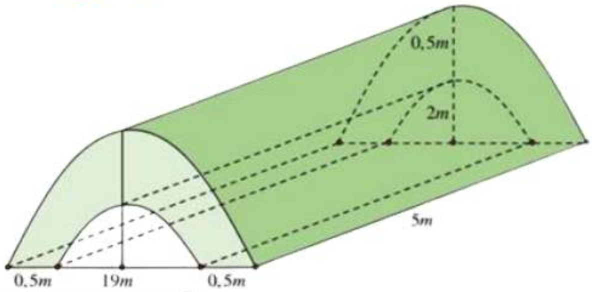
» Câu 43. Cho tam giác vuông OAB có cạnh OA nằm trên trục Ox và $AOB=\alpha\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$ và $B(a;b)$ với a, b là các số thực thỏa $a^2+b^2=1$. Gọi β là khối tròn xoay sinh ra khi quay miền tam giác OAB xung quanh trục Ox.



Tính giá trị $\tan\alpha$ khi thể tích của khối β đạt giá trị lớn nhất. *Làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ 2.*

Điền đáp số:

» Câu 44. Trong chương trình nông thôn mới, tại một xã Y có xây một cây cầu bằng bê tông như hình vẽ. Tính thể tích khối bê tông để đổ đủ cây cầu. (Đường cong trong hình vẽ là các đường Parabol)



Điền đáp số:

» Câu 45. Cho hình phẳng (D) được giới hạn bởi các đường $y = x^2 + 2x + 2$; $y = 6 - x$; $y = 2$ và (D) nằm ngoài Parabol $y = x^2 + 2x + 2$. Khi cho (D) quay quanh trục Ox, ta nhận được vật thể tròn xoay có thể tích $V = \frac{a\pi}{b}$, trong đó a, b là các số nguyên dương . Giá trị biểu thức $P = a - 2b^2$ bằng bao nhiêu.

Điền đáp số:

-------------------- **Hết** --------------------

Chương 04

Bài 1. NGUYÊN HÀM

A. Lý thuyết

1. Nguyên hàm

Định nghĩa:

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên K.

Hàm số $F(x)$ được gọi là ***nguyên hàm*** của hàm số $f(x)$ trên K nếu

$$F'(x)=f(x) \text{ với mọi } x \text{ thuộc } K.$$

Tổng quát, ta có:

Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K. Khi đó:

» Với mỗi hằng số C, hàm số $F(x)+C$ cũng là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K.

» Nếu $G(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K thì tồn tại hằng số C sao cho $G(x)=F(x)+C$ với mọi x thuộc K.

Như vậy, mọi nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K đều có dạng $F(x)+C$, với C là hằng số. Ta gọi $F(x)+C$, $C\in\mathbb{R}$ là họ tất cả các nguyên hàm của $f(x)$ trên K,

» Kí hiệu $\int f(x)\mathrm{d}x$

» Viết $\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$

2. Nguyên hàm một số hàm số sơ cấp cơ bản

Nguyên hàm hàm sơ cấp

- Với $\alpha\neq-1$, ta có: $\int x^{\alpha}\mathrm{d}x=\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$;
- $\int \sin x\mathrm{d}x=-\cos x+C$;
- $\int \cos x\mathrm{d}x=\sin x+C$;
- Với $a>0$, $a\neq1$, ta có: $\int a^{x}\mathrm{d}x=\dfrac{a^{x}}{\ln a}+C$
- $\int \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln|x|+C$;
- $\int \dfrac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x=-\cot x+C$
- $\int \dfrac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=\tan x+C$

3. Tính chất

Cho $f(x)$, $g(x)$ là hai hàm số liên tục trên K.

(1) $\int kf(x)\mathrm{d}x = k\int f(x)\mathrm{d}x$ với k là hằng số khác 0

(2) $\int\left[f(x)+g(x)\right]\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x + \int g(x)\mathrm{d}x$

(3) $\int\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x - \int g(x)\mathrm{d}x$

B. Các dạng bài tập

Dạng 1. Áp dụng định nghĩa

Phương pháp

Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K. Khi đó:

» Với mỗi hằng số C, hàm số $F(x)+C$ cũng là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K.

» Nếu $G(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K thì tồn tại hằng số C sao cho $G(x)=F(x)+C\ \forall x\in K$.

Như vậy, mọi nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K đều có dạng $F(x)+C$, với C là hằng số.

Ta gọi $F(x)+C$, $C\in\mathbb{R}$ là họ tất cả các nguyên hàm của $f(x)$ trên K,

» Kí hiệu $\int f(x)\mathrm{d}x$

» Viết $\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$

Ví dụ 1.1.

Chứng minh $F(x)=2x^3-5x+4$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=6x-5$ trên $\mathbb{R}$.

Lời giải

Ta có: $F'(x)=\left(2x^3-5x+4\right)'=6x^2-5=f(x)$ với mọi x thuộc $\mathbb{R}$.

Vậy $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$.

Ví dụ 1.2.

Tìm $\int \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$ trên $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

Lời giải

Vì $(\tan x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$ với mọi x thuộc $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$

Nên $F(x)=\tan x$ là một nguyên hàm của $\frac{1}{\cos^2 x}$ trên $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

Vậy $\int \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=\tan x+C$ trên $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

Ví dụ 1.3.

Trong mỗi trường hợp sau, hàm số $F(x)$ có là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên khoảng tương ứng không? Vì sao?

(1) $F(x)=x\ln x$ và $f(x)=1+\ln x$ trên khoảng $(0;+\infty)$;

(2) $F(x)=e^{\sin x}$ và $f(x)=e^{\cos x}$ trên $\mathbb{R}$.

Lời giải

(1) $F(x)=x\ln x$ và $f(x)=1+\ln x$ trên khoảng $(0;+\infty)$;

$\forall x\in(0;+\infty)$, ta có $F'(x)=\ln x+x.\dfrac{1}{x}=\ln x+1=f(x)$ nên hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên khoảng $(0;+\infty)$.

(2) $F(x)=e^{\sin x}$ và $f(x)=e^{\cos x}$ trên $\mathbb{R}$.

Vì $F'(x)=e^{\sin x}\cos x\neq f(x)=e^{\cos x}$ nên hàm số $F(x)$ không là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$.

Dạng 2. Nguyên hàm hàm số lũy thừa

Phương pháp

(1) $\int 0\,\mathrm{d}x = C$

(2) $\int \mathrm{d}x = x + C$

(3) $\int x^{\alpha}\mathrm{d}x = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \ (\alpha \neq -1)$

(4) $\int \dfrac{1}{x^2}\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{x} + C$

(5) $\int \dfrac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 2\sqrt{x} + C$

(6) $\int \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x| + C \ (x \neq 0)$

Ta có thể áp dụng ***lũy thừa với số mũ thực*** để biến đổi.

Cho a,b là những số thực dương, α,β là những số thực bất kì. Khi đó:

» $a^{\alpha}a^{\beta} = a^{\alpha+\beta}$ » $\dfrac{a^{\alpha}}{a^{\beta}} = a^{\alpha-\beta}$ » $\left(a^{\alpha}\right)^{\beta} = a^{\alpha.\beta}$ » $(ab)^{\alpha} = a^{\alpha}b^{\alpha}$ » $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\alpha} = \dfrac{a^{\alpha}}{b^{\alpha}}$

Ví dụ 2.1.

Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3 + x$ là

Lời giải

$$\int\left(x^3+x^2\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + C.$$

Ví dụ 2.2.

Nguyên hàm của các hàm số

(1) $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - 2x^2 + x - 2024$

(2) $f(x) = (x+1)(x+2)(x+3)$

Lời giải

(1) $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - 2x^2 + x - 2024$

$$\int\left(\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + x - 2024\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{3}.\frac{x^4}{4} - 2.\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2024x + C = \frac{1}{12}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2024x + C.$$

(2) $f(x) = (x+1)(x+2)(x+3)$

$$f(x) = (x+1)(x+2)(x+3) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$$

$$\Rightarrow \int\left(x^3 + 6x^2 + 11x + 6\right)\mathrm{d}x = \frac{x^4}{4} + 2x^3 + \frac{11}{2}x^2 + 6x + C.$$

Ví dụ 2.3.

Nguyên hàm của các hàm số

(1) $\int\left(3\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)\mathrm{d}x$

(2) $\int \sqrt{x}\left(7x^2 - 3\right)\mathrm{d}x \ (x > 0)$

Lời giải

(1) $\int\left(3\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)\mathrm{d}x$

$$\int\left(3\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)\mathrm{d}x=\int\left(3x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{-1}{3}}\right)\mathrm{d}x=3\int x^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x+\int x^{\frac{-1}{3}}\mathrm{d}x=2x^{\frac{3}{2}}+\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}+C=2x\sqrt{x}+\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+C.$$

(2) $\int\sqrt{x}\left(7x^2-3\right)\mathrm{d}x\left(x>0\right)$

$$\int\sqrt{x}\left(7x^2-3\right)\mathrm{d}x=\int\left(7x^{\frac{5}{2}}-3x^{\frac{1}{2}}\right)\mathrm{d}x=7\int x^{\frac{5}{2}}\mathrm{d}x-3\int x^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x=2x^3\sqrt{x}-2x\sqrt{x}+C\left(x>0\right).$$

Dạng 3. Nguyên hàm hàm số lượng giác

Phương pháp

(1) $\int \sin x dx = -\cos x + C$

(2) $\int \cos x dx = \sin x + C$

(3) $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$

(4) $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$

Ta có thể áp dụng *các công thức liên quan* để biến đổi.

01	*Công thức cơ bản*	① $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ ② $1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$, $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ③ $1 + \cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$, $\alpha \neq k\pi$ ④ $\tan\alpha . \cot\alpha = 1$, $\alpha \neq \frac{k\pi}{2}$
02	*Công thức cộng*	① $\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \sin b \cos a$ ② $\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$ ③ $\tan(a \pm b) = \frac{\tan a \pm \tan b}{1 \mp \tan a \tan b}$
03	*Công thức nhân đôi*	① $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ ② $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$ ③ $\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$, $\begin{cases} \alpha \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \\ \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}$
04	*Công thức hạ bậc*	① $\sin^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$ ② $\cos^2\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$ ③ $\tan^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$, $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$
05	*Công thức tích thành tổng*	① $\cos a \cos b = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) + \cos(a+b)\right]$ ② $\sin a \sin b = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right]$ ③ $\sin a \cos b = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b) + \sin(a-b)\right]$ ④ $\cos a \sin b = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b) - \sin(a-b)\right]$

Ví dụ 3.1.

Nguyên hàm của các hàm số

(1) $f(x)=1+\sin x$

(2) $f(x)=2\sin x+3x$

(3) $f(x)=\cos^2\frac{x}{2}$

(4) $f(x)=1-\frac{1}{\cos^2 x}$

Lời giải

(1) $f(x)=1+\sin x$

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\int(1+\sin x)\mathrm{d}x=\int 1\mathrm{d}x+\int\sin x\mathrm{d}x=x-\cos x+C.$$

(2) $f(x)=2\sin x+3x$

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\int(2\sin x+3x)\mathrm{d}x=-2\cos x+\frac{3}{2}x^2+C$$

(3) $f(x)=\cos^2\frac{x}{2}$

Ta có: $f(x)=\cos^2\frac{x}{2}\Rightarrow\int\cos^2\frac{x}{2}\mathrm{d}x=\int\frac{1+\cos x}{2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int(1+\cos x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(1+\sin x)+C$

(4) $f(x)=1-\frac{1}{\cos^2 x}$

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\int\left(1-\frac{1}{\cos^2 x}\right)\mathrm{d}x=x-\tan x+C.$$

Ví dụ 3.2.

Tìm nguyên hàm $\int\sin 3x\cos 5x\mathrm{d}x$

Lời giải

$$\int\sin 3x\cos 5x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int(\sin 8x-\sin 2x)\mathrm{d}x=-\frac{1}{16}\cos 8x+\frac{1}{4}\cos 2x+C\ .$$

Ví dụ 3.3.

Nguyên hàm của các hàm số

(1) $\int\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2\mathrm{d}x$

(2) $\int\left(x+\tan^2 x\right)\mathrm{d}x$

Lời giải

(1) $\int\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2\mathrm{d}x$

$$\int\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2\mathrm{d}x=\int\left(\sin^2\frac{x}{2}-2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x=\int(1-\sin x)\mathrm{d}x=x+\cos x+C$$

(2) $\int\left(x+\tan^2 x\right)\mathrm{d}x$

$$\int\left(x+\tan^2 x\right)\mathrm{d}x=\int\left(x+\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x^2+\tan x-x+C.$$

Dạng 4. Nguyên hàm hàm số mũ

Phương pháp

(1) $\int e^x dx = e^x + C$ (2) $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0,\ a \neq 1)$

Ta có thể áp dụng ***các công thức liên quan*** để biến đổi:

Cho α, β là những số thực dương, α, β là những số thực bất kì. Khi đó:

» $a^\alpha a^\beta = a^{\alpha+\beta}$ » $\dfrac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\alpha-\beta}$ » $\left(a^\alpha\right)^\beta = a^{\alpha.\beta}$ » $\left(\frac{a}{b}\right)^\alpha = \frac{a^\alpha}{b^\alpha}$ » $f(x) = x^3 + a$

Ví dụ 4.1.

Nguyên hàm của các hàm số

(1) $f(x) = \mathrm{e}^{2x-1}$ (2) $f(x) = 3^{-x}$ (3) $f(x) = 7^x.2^{x+2}$

Lời giải

(1) $f(x) = \mathrm{e}^{2x-1}$

$$\int e^{2x-1}dx = \int e^{-1}.\left(e^2\right)^x dx = e^{-1}.\frac{\left(e^2\right)^x}{\ln e^2} + C = \frac{e^{2x-1}}{2} + C$$

(2) $f(x) = 3^{-x}$

$$\int 3^{-x}dx = \int \left(3^{-1}\right)^x dx = \frac{3^{-x}}{\ln 3^{-1}} + C = -\frac{3^{-x}}{\ln 3} + C$$

(3) $f(x) = 7^x.2^{x+2}$

$$\int \left(7^x.2^{x+2}\right)dx = \int \left(7^x.2^x.2^2\right)dx = 4\int (7.2)^x dx = 4\int (14)^x dx = 4.\frac{14^x}{\ln 14} + C.$$

Ví dụ 4.2.

Nguyên hàm của các hàm số

(1) $\int \left(2^x + \dfrac{3}{x^2}\right)dx$ (2) $\int \left(e^{x+1} - \dfrac{e}{x^2}\right)dx$

Lời giải

(1) $\int \left(2^x + \dfrac{3}{x^2}\right)dx$

Ta có: $\int \left(2^x + \dfrac{3}{x^2}\right)dx = \int 2^x dx + \int \dfrac{3}{x^2}dx = \dfrac{2^x}{\ln 2} - \dfrac{3}{x} + C$.

(2) $\int \left(e^{x+1} - \dfrac{e}{x^2}\right)dx$

Ta có: $\int \left(e^{x+1} - \dfrac{e}{x^2}\right)dx = \int e^{x+1}dx - \int \dfrac{e}{x^2}dx = e^{x+1} - \dfrac{e}{x} + C$.

Dạng 5. Nguyên hàm có điều kiện

Phương pháp

Bài toán: Tìm nguyên hàm $F(x)$ của $f(x)$ thỏa $F(a)=b$

» ***Bước 1:*** Dựa vào bảng nguyên hàm, tính chất nguyên hàm, các phương pháp biến đổi.

» ***Bước 2:*** Dựa vào điều kiện của giả thiết: $F(a)=b$ để tìm C.

» ***Bước 3:*** Kết luận.

Ví dụ 5.1.

Cho hàm số $f'(x)=3x^2$. Tìm nguyên hàm $f(x)$ của $f'(x)$ thỏa $f(0)=1$.

Lời giải

Ta có $f(x)=\int f'(x)\mathrm{d}x=\int 3x^2\mathrm{d}x=x^3+C$

Mà $f(0)=1\Rightarrow 0^3+C=1\Leftrightarrow C=1$. Vậy $f(x)=x^3+C$.

Ví dụ 5.2.

Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=\sin x+\cos x$ thoả mãn $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=2$.

Lời giải

Có $F(x)=\int f(x)\mathrm{d}x=\int(\sin x+\cos x)\mathrm{d}x=-\cos x+\sin x+C$

Do $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-\cos\dfrac{\pi}{2}+\sin\dfrac{\pi}{2}+C=2\Leftrightarrow 1+C=2\Leftrightarrow C=1\Rightarrow F(x)=-\cos x+\sin x+1$.

Ví dụ 5.3.

Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)=e^x+2x$ thỏa mãn $F(0)=\dfrac{3}{2}$. Tìm $F(x)$

Lời giải

Ta có $F(x)=\int\left(e^x+2x\right)\mathrm{d}x=e^x+x^2+C$

Theo bài ra ta có: $F(0)=1+C=\dfrac{3}{2}\Rightarrow C=\dfrac{1}{2}\Rightarrow F(x)=e^x+x^2+\dfrac{1}{2}$.

Ví dụ 5.4.

Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)=\dfrac{1}{2x-1}, x\neq\dfrac{1}{2}$ và $F(1)=0$. Tính $F(5)$.

Lời giải

Ta có $F(x)=\int f(x)\mathrm{d}x=\int\dfrac{1}{2x-1}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\ln|2x-1|+C$

Mà $F(1)=0\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}\ln|2.1-1|+C=0\Leftrightarrow C=0$

$\Rightarrow F(x)=\frac{1}{2}\ln|2x-1|$

Vậy $F(5)=\frac{1}{2}\ln|2.5-1|=\frac{1}{2}\ln 9=\ln 3$.

Ví dụ 5.5.

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(0;+\infty)$. Biết rằng $f'(x)=2x+\frac{1}{x^2}$ với mọi $x\in(0;+\infty)$ và $f(1)=1$. Tính giá trị $f(4)$.

Lời giải

Với mọi $x\in(0;+\infty)$, ta có:

$f(x)=\int f'(x)\mathrm{d}x=\int\left(2x+\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x=x^2-\frac{1}{x}+C$.

Vì $f(1)=1\Rightarrow C=1\Rightarrow f(x)=x^2-\frac{1}{x}+1\Rightarrow f(4)=16-\frac{1}{4}+1=\frac{67}{4}$

Ví dụ 5.6.

Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=12x+2$ với mọi $x\in\mathbb{R}$ và $f(1)=3$. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ thoả mãn $F(0)=2$. Tính giá trị $F(1)$.

Lời giải

Với mọi $x\in\mathbb{R}$, ta có:

$f(x)=\int f'(x)\mathrm{d}x=\int(12x^2+2)\mathrm{d}x=4x^3+2x+C_1$.

Vì $f(1)=3\Rightarrow C_1=-3\Rightarrow f(x)=4x^3+2x-3$.

Lại có: $F(x)=\int f(x)\mathrm{d}x=\int(4x^3+2x-3)\mathrm{d}x=x^4+x^2-3x+C_2$

$F(0)=2\Rightarrow C_2=2\Rightarrow F(x)=x^4+x^2-3x+2\Rightarrow F(1)=1$.

Dạng 6. Bài toán thực tế *(liên quan đến vận tốc, gia tốc, quãng đường,...)*

Phương pháp

Bài toán: Tìm nguyên hàm $F(x)$ của $f(x)$ thỏa $F(a)=b$

» *Bước 1:* Xét mối liên hệ giữa các đại lượng

- Xét mối quan hệ giữa các đại lượng vận tốc $v(t)$, quãng đường $s(t)$ và thời gian t

  + Đạo hàm của quãng đường là vận tốc: $s'(t)=v(t)$

  + Nguyên hàm của vận tốc là quãng đường: $s(t)=\int v(t)dt$

- Xét mối quan hệ giữa các đại lượng vận tốc $v(t)$, gia tốc $a(t)$ và thời gian t

  + Đạo hàm của vận tốc là gia tốc: $v'(t)=a(t)$

  + Nguyên hàm của gia tốc là vận tốc: $v(t)=\int a(t)dt$

» *Bước 2:* Dựa vào điều kiện của giả thiết để tìm đại lượng yêu cầu.

» *Bước 3:* Kết luận.

Ví dụ 6.1.

Một ô tô đang chạy với vận tốc 19 m/s thì hãm phanh và chuyển động chậm dần với tốc độ $v(t)=19-2t$ (m/s). Kể từ khi hãm phanh, quãng đường ô tô đi được sau 5 giây là bao nhiêu?

Lời giải

Ta có $s(t)=\int v(t)dt=\int(19-2t)dt=19t-t^2+C$

Ta có $s(0)=0\Leftrightarrow 19.0-0^2+C=0\Leftrightarrow C=0$

Nên $s(t)=19t-t^2$

Vậy sau 5 giây thì $t=5$, quãng đường ô tô đi được là $s(5)=19.5-5^2=70\ m$.

Ví dụ 6.2.

Một viên đạn được bắn thẳng đứng lên trên từ mặt đất. Giả sử tại thời điểm t giây (coi $t=0$ là thời điểm viên đạn được bắn lên), vận tốc của nó được cho bởi $v(t)=160-9,8t\ (m/s)$. Tìm độ cao của viên đạn (tính từ mặt đất):

(1) Sau $t=5$ giây.

(2) Khi nó đạt độ cao lớn nhất (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).

Lời giải

Gọi $h(t)$ là độ cao của viên đạn bắn lên từ mặt đất sau t giây kể từ thời điểm đạn được bắn lên.

Khi đó $h(t)=\int v(t)\mathrm{d}(t)=\int(160-9,8t)\mathrm{d}(t)=160t-4,9t^2+C$.

Do $h(0)=0$ nên $C=0$ $\Rightarrow h(t)=-4,9t^2+160t\ (m)$.

(1) Sau $t=5$ giây.

Độ cao của viên đạn sau 5 giây là $h\left(5\right)=-4,9.5^2+160.5=677,5\left(m\right)$.

(2) Khi nó đạt độ cao lớn nhất (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).

Viên đạn đạt độ cao lớn nhất là $h=-\frac{\Delta}{4a}=\frac{64000}{49}\approx 1306,1\left(m\right)$ khi $t=-\frac{b}{2a}=\frac{800}{49}$ giây.

Chương 04

Bài 1. NGUYÊN HÀM

C Luyện tập

A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm

» Câu 1. Hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên khoảng K nếu

A. $F'(x)=-f(x),\forall x\in K.$ **B.** $f'(x)=F(x),\forall x\in K.$

C. $F'(x)=f(x),\forall x\in K.$ **D.** $f'(x)=-F(x),\forall x\in K.$

Lời giải

Chọn C

Theo định nghĩa thì hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên khoảng K nếu $F'(x)=f(x),\forall x\in K.$

» Câu 2. Cho hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng K. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. $F(x)=f'(x).$ **B.** $F'(x)=f(x).$

C. $\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)'=F'(x).$ **D.** $\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C.$

Lời giải

Chọn A

Theo định nghĩa suy ra A sai.

» Câu 3. Cho hai hàm số $f(x)$, $g(x)$ là hàm số liên tục, có $F(x)$, $G(x)$ lần lượt là nguyên hàm của $f(x)$, $g(x)$. Xét các mệnh đề sau:

(I). $F(x)+G(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)+g(x)$.

(II). $k.F(x)$ là một nguyên hàm của $k.f(x)$ với $k\in\mathbb{R}^*$.

(III). $F(x).G(x)$ là một nguyên hàm của $f(x).g(x)$.

Các mệnh đề đúng là

A. (I) và (II). **B.** Cả 3 mệnh đề. **C.** (I) và (III). **D.** (II) và (III).

Lời giải

Chọn A

Theo tính chất nguyên hàm thì (I) và (II) là đúng, (III) sai.

» Câu 4. Cho $\int f(x)\mathrm{d}x=F_1(x)$, $\int g(x)\mathrm{d}x=F_2(x)$. Tính $I=\int\left[2g(x)-f(x)\right]\mathrm{d}x$.

A. $2F_1(x)-F_2(x)+C$. **B.** $F_2(x)-F_1(x)+C$.

C. $2F_2(x)-F_1(x)+C$. **D.** $\left|F_1(x)+F_2(x)\right|+C$.

Lời giải

Chọn C

Do $I=\int\left[2g(x)-f(x)\right]\mathrm{d}x=2\int g(x)\mathrm{d}x-\int f(x)\mathrm{d}x=2F_2(x)-F_1(x)+C$.

» Câu 5. Cho $\int 5^x\mathrm{d}x=F(x)+C$. Khẳng định nào dưới đây **đúng**?

A. $F'(x)=5^x\ln 5$. **B.** $F'(x)=5^x+C$. **C.** $F'(x)=-5^x$. **D.** $F'(x)=5^x$.

Lời giải

Chọn D

Do $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số 5^x nên $F'(x)=5^x$.

» Câu 6. $\int x^4\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{1}{5}x^5+C$. **B.** $4x^3+C$. **C.** x^5+C. **D.** $5x^5+C$.

Lời giải

Chọn A

$\int x^4\mathrm{d}x=\frac{1}{5}x^5+C$.

» Câu 7. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sqrt{2x-1}$.

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1}+C$.

B. $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1}+C$..

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=-\frac{1}{3}\sqrt{2x-1}+C$.

D. $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sqrt{2x-1}+C$.

Lời giải

Chọn B

$\int f(x)\mathrm{d}x=\int\sqrt{2x-1}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int(2x-1)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}(2x-1)=\frac{1}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1}+C$.

» Câu 8. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=\cos 3x$

A. $\int\cos 3x\,\mathrm{d}x=3\sin 3x+C$

B. $\int\cos 3x\,\mathrm{d}x=\frac{\sin 3x}{3}+C$.

C. $\int\cos 3x\,\mathrm{d}x=\sin 3x+C$

D. $\int\cos 3x\,\mathrm{d}x=-\frac{\sin 3x}{3}+C$

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\int\cos 3x\,\mathrm{d}x=\frac{\sin 3x}{3}+C$

» Câu 9. Hàm số $F(x)=e^{x^2}$ là nguyên hàm của hàm số nào trong các hàm số sau:

A. $f(x)=2xe^{x^2}$ **B.** $f(x)=x^2e^{x^2}-1$. **C.** $f(x)=e^{2x}$ **D.** $f(x)=\frac{e^{x^2}}{2x}$

Lời giải

Chọn A

Ta có $f(x)=F'(x)\Rightarrow f(x)=\left(e^{x^2}\right)'=2xe^{x^2}$.

» Câu 10. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{x^4+2}{x^2}$.

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}-\frac{1}{x}+C$

B. $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}+\frac{2}{x}+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}+\frac{1}{x}+C$

D. $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}-\frac{2}{x}+C$

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\int f(x)\mathrm{d}x=\int\frac{x^4+2}{x^2}\mathrm{d}x=\int\left(x^2+\frac{2}{x^2}\right)\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}-\frac{2}{x}+C$.

» **Câu 11.** Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $\int\left[f(x)+g(x)\right]\mathrm{d}x=\int f(x)\mathrm{d}x+\int g(x)\mathrm{d}x$.

B. $\int\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x=\int f(x)\mathrm{d}x-\int g(x)\mathrm{d}x$.

C. $\int kf(x)\mathrm{d}x=k\int f(x)\mathrm{d}x,\forall k\in\mathbb{R}$.

D. $\int kf(x)\mathrm{d}x=k\int f(x)\mathrm{d}x,\forall k\in\mathbb{R},k\neq 0$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\int kf(x)\mathrm{d}x=k\int f(x)\mathrm{d}x,\forall k\in\mathbb{R},k\neq 0$ nên đáp án C sai.

» **Câu 12.** Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\int\left(x-\frac{1}{x}\right)^2\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}-2x-\frac{1}{x}+C$.

B. $\int\left(x-\frac{1}{x}\right)^2\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}-2x+\frac{1}{x}+C$.

C. $\int\left(x-\frac{1}{x}\right)^2\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\left(x-\frac{1}{x}\right)^3+C$.

D. $\int\left(x-\frac{1}{x}\right)^2\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\left(x-\frac{1}{x}\right)^3\left(1+\frac{1}{x^2}\right)+C$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\int\left(x-\frac{1}{x}\right)^2\mathrm{d}x=\int\left(x^2-2+\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}-2x-\frac{1}{x}+C$.

» **Câu 13.** Hàm số $F(x)=x\sin x+\cos x+2024$ là một nguyên hàm của hàm số nào trong các hàm số sau?

A. $f(x)=x\sin x$.

B. $f(x)=-x\cos x$.

C. $f(x)=-x\sin x$.

D. $f(x)=x\cos x$.

Lời giải

Chọn D

$F'(x)=\left(x\sin x+\cos x+2024\right)'=\sin x+x\cos x-\sin x=x\cos x,\ \forall x\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ Hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=x\cos x$ trên $\mathbb{R}$.

» **Câu 14.** Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=3x^2+2x+5$ là

A. x^3+x^2+5.

B. x^3+x+C.

C. x^3+x^2+5x+C.

D. x^3+x^2+C.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x=\int\left(3x^2+2x+5\right)\mathrm{d}x=x^3+x^2+5x+C$.

» **Câu 15.** Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=(x+1)(x+2)$

A. $F(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x^2+2x+C$.

B. $F(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{2}{3}x^2+2x+C$.

C. $F(x)=2x+3+C$.

D. $F(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{2}{3}x^2+2x+C$.

Lời giải

Chọn A

$\int(x+1)(x+2)\mathrm{d}x=\int(x^2+3x+2)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+2x+C$.

» Câu 16. Tìm nguyên hàm $\int\frac{\cos 2x}{\sin^2 x\cos^2 x}\mathrm{d}x$

A. $F(x)=-\cos x-\sin x+C$.

B. $F(x)=\cos x+\sin x+C$

C. $F(x)=\cot x-\tan x+C$.

D. $F(x)=-\cot x-\tan x+C$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\int\frac{\cos 2x}{\sin^2 x\cos^2 x}\mathrm{d}x=\int\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}\mathrm{d}x=\int\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{\cos^2 x}\right)\mathrm{d}x=-\cot x-\tan x+C$.

» Câu 17. Cho hàm số $f(x)=2x+e^x$. Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)$ thoả mãn $F(0)=2024$.

A. $F(x)=x^2+e^x+2023$.

B. $F(x)=x^2+e^x-2023$.

C. $F(x)=x^2+e^x+2022$.

D. $F(x)=x^2+e^x-2024$.

Lời giải

Chọn A

Ta có:

$F(x)=\int f(x)\mathrm{d}x=\int(2x+e^x)\mathrm{d}x=x^2+e^x+C$

$F(0)=2024\Rightarrow C=2023\Rightarrow F(x)=x^2+e^x+2023$.

» Câu 18. Nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=\cos x$ thỏa mãn $F(0)=1$ là

A. $F(x)=\sin x+1$.

B. $F(x)=-\sin x+1$.

C. $F(x)=\cos x$.

D. $F(x)=-\cos x+2$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $F(x)=\int f(x)\mathrm{d}x=\int\cos x\mathrm{d}x=\sin x+C$.

Vì $F(0)=1$ nên $\sin 0+C=1\Leftrightarrow C=1$.

Vậy $F(x)=\sin x+1$.

» Câu 19. Cho hàm số $f(x)=2x+e^x$. Hàm số $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ sao cho $F(0)=2024$. Tính $F(1)$.

A. $e+2025$.

B. $e-2024$.

C. $e+2024$.

D. $e-2025$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $F(x)=\int f(x)\mathrm{d}x=\int(2x+e^x)\mathrm{d}x=x^2+e^x+C$.

Vì $F(0)=2024$ nên $0^2+e^0+C=2024\Leftrightarrow C=2023$.

Suy ra $F(x)=x^2+e^x+2023$.

Vậy $F(1)=1^2+e^1+2023=e+2024$.

» Câu 20. Hàm số $F(x)=\sqrt[3]{x}+2\sqrt{x}+x\sqrt{x}$ là một nguyên hàm của hàm số nào dưới đây?

A. $f_1(x)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{3}{2}\sqrt{x}$.

B. $f_3(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{3}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{3}{2}\sqrt{x}$.

C. $f_2(x)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{3}{2\sqrt{x}}$.

D. $f_2(x)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}+\dfrac{1}{2}\sqrt{x}+\dfrac{3}{2\sqrt{x}}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $F'(x)=\left(\sqrt[3]{x}+2\sqrt{x}+x\sqrt{x}\right)'=\left(x^{\frac{1}{3}}+2\sqrt{x}+x^{\frac{3}{2}}\right)'=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{3}{2}\sqrt{x}$.

» Câu 21. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$, với $f(x)=\dfrac{x(x-3)^2}{x^2}$, biết $F(1)=\dfrac{5}{2}$. Tính $F(2)$.

A. $F(2)=2+9\ln 2$.

B. $F(2)=-2+9\ln 2$.

C. $F(2)=1+9\ln 2$.

D. $F(2)=7$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $F(x)=\int\dfrac{x(x-3)^2}{x^2}\mathrm{d}x=\int\dfrac{x(x^2-6x+9)}{x^2}\mathrm{d}x=\int\dfrac{x^3-6x^2+9x}{x^2}\mathrm{d}x$

$=\int\left(x-6+\dfrac{9}{x}\right)\mathrm{d}x=\dfrac{x^2}{2}-6x+9\ln|x|+C$.

Vì $F(1)=\dfrac{5}{2}\Rightarrow\dfrac{1}{2}-6+C=\dfrac{5}{2}\Rightarrow C=8$ suy ra $F(x)=\dfrac{x^2}{2}-6x+9\ln|x|+8$.

Vậy $F(2)=-2+9\ln 2$.

» Câu 22. Cho hàm số $f(x)=3\cos x-\dfrac{2}{x}+\dfrac{4}{\sin^2 x}$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=3\sin x-2\ln|x|-4\cot x+C$.

B. $\int f(x)\mathrm{d}x=3\sin x-2\ln x-4\cot x+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=3\sin x-2\ln|x|+4\cot x+C$.

D. $\int f(x)\mathrm{d}x=-3\sin x-2\ln|x|-4\cot x+C$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\int f(x)\mathrm{d}x=\int\left(3\cos x-\dfrac{2}{x}+\dfrac{4}{\sin^2 x}\right)\mathrm{d}x$

$=3\int\cos x\mathrm{d}x-2\int\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x+4\int\dfrac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x$

$=3\sin x-2\ln|x|-4\cot x+C$.

» Câu 23. Một vật chuyển động có gia tốc là $a(t)=3t^2+t\ (m/s^2)$. Biết rằng vận tốc ban đầu của vật là $2\ m/s$. Vận tốc của vật đó sau 2 giây là

A. $8\ m/s$.

B. $12\ m/s$.

C. $10\ m/s$.

D. $16\ m/s$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $v(t)=\int a(t)\mathrm{d}t=\int(3t^2+t)\mathrm{d}t=t^3+\frac{1}{2}t^2+C.$

Vì vận tốc ban đầu của vật là $2\ m/s$ nên $v(0)=2\Leftrightarrow C=2.$

Suy ra $v(t)=t^3+\frac{1}{2}t^2+2.$

Vậy $v(2)=2^3+\frac{1}{2}.2^2+2=12\ m/s.$

» Câu 24. Một viên đạn được bắn thẳng đứng lên trên từ mặt đất. Giả sử tại thời điểm t giây (coi $t=0$ là thời điểm viên đạn được bắn lên), vận tốc của nó được cho bởi $v(t)=25-9,8t\ (m/s)$. Độ cao của viên đạn (tính từ mặt đất) đạt giá trị lớn nhất là

A. $\frac{125}{49}$. **B.** $\frac{3125}{98}$. **C.** $\frac{2375}{392}$. **D.** $\frac{1125}{98}$.

Lời giải

Chọn B

Gọi $h(t)$ là độ cao của viên đạn bắn lên từ mặt đất sau t giây kể từ thời điểm đạn được bắn lên.

Khi đó $h(t)=\int v(t)\mathrm{d}(t)=\int(25-9,8t)\mathrm{d}(t)=25t-4,9t^2+C\ (m).$

Do $h(0)=0$ nên $C=0\ \Rightarrow h(t)=-4,9t^2+25t\ (m).$

Vậy viên đạn đạt độ cao lớn nhất là $h=-\frac{\Delta}{4a}=\frac{3125}{98}\ (m)$ khi $t=-\frac{b}{2a}=\frac{125}{49}$ giây.

» Câu 25. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị là (C). Xét điểm $M(x;f(x))$ thay đổi trên (C). Biết rằng, hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị (C) tại M là $k_M=(x+2)^2$ và điểm $A(0;1)$ thuộc đồ thị (C). Tìm biểu thức $f(x)$.

A. $f(x)=\frac{x^3}{3}+2x^2+4x$. **B.** $f(x)=x^3+2x^2+4x+1$.

C. $f(x)=\frac{x^3}{3}-2x^2+4x$. **D.** $f(x)=\frac{x^3}{3}+2x^2+4x+1$.

Lời giải

Chọn D

Hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị (C) tại M là $k_M=(x+2)^2$

$\Rightarrow f(x)=\int(x+2)^2\,dx=\int(x^2+4x+4)\,dx=\frac{x^3}{3}+2x^2+4x+c.$

Ta có điểm $A(0;1)$ thuộc đồ thị (C)

$\Rightarrow f(0)=1$

$\Rightarrow \frac{0^3}{3}+2.0^2+4.0+c=1\Rightarrow c=1.$

Vậy $f(x)=\frac{x^3}{3}+2x^2+4x+1.$

B. *Câu hỏi – Trả lời Đúng/sai*

» Câu 26. Trong mỗi trường hợp sau, hàm số $F(x)$ có là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên khoảng tương ứng không? Vì sao?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Hàm số $F(x)=\frac{1}{3}x^3$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=x^2$ trên $\mathbb{R}$		
(b)	Hàm số $F(x)=2\sin x-3\cos x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=2\cos x-3\sin x$ trên $\mathbb{R}$		
(c)	Hàm số $F(x)=e^{x^2}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=2xe^{x^2}$ trên $\mathbb{R}$		
(d)	Hàm số $F(x)=(4x^2-2x+1)\sqrt{2x-3}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{20x^2-30x+7}{\sqrt{2x-3}}$ trên khoảng $\left(\frac{3}{2};+\infty\right)$		

Lời giải

(a) Hàm số $F(x)=\frac{1}{3}x^3$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=x^2$ trên $\mathbb{R}$.

$F'(x)=x^2=f(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$ nên $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$.

» Chọn ĐÚNG.

(b) Hàm số $F(x)=2\sin x-3\cos x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=2\cos x-3\sin x$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có $F'(x)=2\cos x+3\sin x\neq f(x)$ nên $F(x)$ không là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$.

» Chọn SAI.

(c) Hàm số $F(x)=e^{x^2}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=2xe^{x^2}$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có $F'(x)=\left(e^{x^2}\right)'=2x.e^{x^2}$, $\forall x\in\mathbb{R}$

Nên $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$.

» Chọn ĐÚNG.

(d) Hàm số $F(x)=(4x^2-2x+1)\sqrt{2x-3}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{20x^2-30x+7}{\sqrt{2x-3}}$ trên khoảng $\left(\frac{3}{2};+\infty\right)$.

$$F'(x)=(8x-2)\sqrt{2x-3}+\frac{4x^2-2x+1}{\sqrt{2x-3}}=\frac{(8x-2)(2x-3)+4x^2-2x+1}{\sqrt{2x-3}}=\frac{20x^2-30x+7}{\sqrt{2x-3}}=f(x),$$

$\forall x\in\left(\frac{3}{2};+\infty\right)$

Nên $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\left(\frac{3}{2};+\infty\right)$.

» Chọn ĐÚNG.

» Câu 27. Cho hàm số $f\left(x\right)=ax^3+bx$, với $a,b\in\mathbb{R}$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Biết $a=b=1$, nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)$ là $\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}+C$.		
(b)	Biết $a=b=4$, nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)$ là x^4+2x^2+C.		
(c)	Biết $f\left(1\right)=6; f\left(2\right)=36$, nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)$ là x^4-x^2+C.		
(d)	Biết $f\left(1\right)=2; f\left(-2\right)=-52$, nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)$ là $2x^4-3x^2+C$.		

Lời giải

(a) Biết $a=b=1$, nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)$ là $\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}+C$.

Với $a=b=1$, ta có $f\left(x\right)=x^3+x$

Khi đó $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\left(x^3+x\right)\mathrm{d}x=\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}+C$.

» Chọn ĐÚNG.

(b) Biết $a=b=4$, nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)$ là x^4+2x^2+C.

Với $a=b=4$, ta có $f\left(x\right)=4x^3+4x$

Khi đó $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\left(4x^3+4x\right)\mathrm{d}x=x^4+2x^2+C$.

» Chọn ĐÚNG.

(c) Biết $f\left(1\right)=6; f\left(2\right)=36$, nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)$ là x^4-x^2+C.

Ta có $\begin{cases}f\left(1\right)=6\\ f\left(2\right)=36\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=6\\ 8a+2b=36\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=4\\ b=2\end{cases}$, suy ra $f\left(x\right)=4x^3+2x$

Khi đó $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\left(4x^3+2x\right)\mathrm{d}x=x^4+x^2+C$.

» Chọn SAI.

(d) Biết $f\left(1\right)=2; f\left(-2\right)=-52$, nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)$ là $2x^4-3x^2+C$.

Ta có $\begin{cases}f\left(1\right)=2\\ f\left(-2\right)=-52\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=2\\ -8a-2b=-52\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=8\\ b=-6\end{cases}$, suy ra $f\left(x\right)=8x^3-6x$

Khi đó $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\left(8x^3-6x\right)\mathrm{d}x=2x^4-3x^2+C$.

» Chọn ĐÚNG.

» Câu 28. Các khẳng định sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$\int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)\mathrm{d}x=\ln\left|x\right|+\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+C$		
(b)	$\int\frac{x^2-2x+1}{x}\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}-2x+\ln\left|x\right|+C$		
(c)	$\int\left(\frac{2}{5-2x}+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)\mathrm{d}x=\ln\left|5-2x\right|+2\ln\left|x\right|-\frac{3}{x}+C$		

(d)	Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{x+1}{x-3}$ thỏa $F(4)=3$ thì $F(x)=x+4\ln\left\|x-3\right\|-1$		

Lời giải

(a) $\int\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}\right)\mathrm{d}x=\ln|x|+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2x^2}+C$.

Ta có: $\int\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}\right)\mathrm{d}x=\ln|x|-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2x^2}+C$.

» **Chọn** SAI.

(b) $\int\dfrac{x^2-2x+1}{x}\mathrm{d}x=\dfrac{x^2}{2}-2x+\ln|x|+C$.

$\int\dfrac{x^2-2x+1}{x}\mathrm{d}x=\int\left(x-2+\dfrac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=\dfrac{x^2}{2}-2x+\ln|x|+C$.

» **Chọn** ĐÚNG.

(c) $\int\left(\dfrac{2}{5-2x}+\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2}\right)\mathrm{d}x=\ln|5-2x|+2\ln|x|-\dfrac{3}{x}+C$.

$\int\left(\dfrac{2}{5-2x}+\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2}\right)\mathrm{d}x=-\ln|5-2x|+2\ln|x|-\dfrac{3}{x}+C$.

» **Chọn** SAI.

(d) Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{x+1}{x-3}$ thỏa $F(4)=3$ thì $F(x)=x+4\ln|x-3|-1$

Ta có: $F(x)=\int\dfrac{x+1}{x-3}\mathrm{d}x=\int\left(1+\dfrac{4}{x-3}\right)\mathrm{d}x=x+4\ln|x-3|+C$.

Vì $F(4)=3$ nên $4+4\ln|4-3|+C=3\Leftrightarrow C=-1$. Vậy $F(x)=x+4\ln|x-3|-1$.

» **Chọn** ĐÚNG.

» **Câu 29.** Cho hàm số $F(x)=\int\sqrt{x}\left(x^2-5x+1\right)dx=\dfrac{ax^3\sqrt{x}}{b}-ax^2\sqrt{x}+\dfrac{a}{c}x\sqrt{x}+C\,(x>0)$. Xét tính đúng-sai của các khẳng định sau:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$F(x)=\dfrac{2x^3\sqrt{x}}{7}-2x^2\sqrt{x}+\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}+C$		
(b)	Tổng $a+b+c=12$		
(c)	Tích $a.b.c=42$		
(d)	$F(1)=\dfrac{2002}{21}$ thì $F(x)=\dfrac{2x^3\sqrt{x}}{7}-2x^2\sqrt{x}+\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}+2024$		

Lời giải

Ta có $F(x)=\int\sqrt{x}\left(x^2-5x+1\right)dx=\int\left(x^{\frac{5}{2}}-5x^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{1}{2}}\right)dx=\dfrac{2x^3\sqrt{x}}{7}-2x^2\sqrt{x}+\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}+C\,(1)$

(a) $F(x)=\dfrac{2x^3\sqrt{x}}{7}-2x^2\sqrt{x}+\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}+C$.

Theo (1) ta có $F(x)=\dfrac{2x^3\sqrt{x}}{7}-2x^2\sqrt{x}+\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}+C$.

» Chọn ĐÚNG.

(b) *Tổng* $a+b+c=12$.

Theo (1) ta có $a=2;b=7;c=3\Rightarrow\ a+b+c=2+7+3=12$.

» Chọn ĐÚNG.

(c) *Tích* $a.b.c=42$.

Theo (1) ta có $a=2;b=7;c=3\Rightarrow\ a.b.c=2.7.3=42$.

» Chọn ĐÚNG.

(d) $F(1)=\dfrac{2002}{21}$ *thì* $F(x)=\dfrac{2x^3\sqrt{x}}{7}-2x^2\sqrt{x}+\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}+2024$.

Theo (1) ta có $F(1)=\dfrac{2.1^3.\sqrt{1}}{7}-2.1^2.\sqrt{1}+\dfrac{2}{3}.1.\sqrt{1}+C=\dfrac{2002}{21}\Leftrightarrow\dfrac{-22}{21}+C=\dfrac{2002}{21}\Rightarrow C=\dfrac{2024}{21}$

$\Rightarrow F(x)=\dfrac{2x^3\sqrt{x}}{7}-2x^2\sqrt{x}+\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}+\dfrac{2024}{21}$.

» Chọn SAI.

» Câu 30. Cho $I_1=\int\left(e^x+\dfrac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x$ và $I_2=\int\left(e^{2x-1}-\dfrac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x$. Mỗi khẳng định dưới đây đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$I_1=e^x-\dfrac{1}{x}+C$		
(b)	$I_2=\dfrac{e^{2x-1}}{2}+\ln\lvert x\rvert+C$		
(c)	$I_1+I_2=e^x+\dfrac{e^{2x-1}}{2}+C$		
(d)	Gọi $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)$, với $f(x)=e^x+\dfrac{1}{x^2}$. Nếu $F(1)=e$ thì $F(\ln 2)=1-\dfrac{1}{\ln 2}$.		

Lời giải

(a) $I_1=e^x-\dfrac{1}{x}+C$.

Vì $I_1=\int\left(e^x+\dfrac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x=e^x-\dfrac{1}{x}+C$.

» Chọn ĐÚNG.

(b) $I_2=\dfrac{e^{2x-1}}{2}+\ln\lvert x\rvert+C$.

Ta có: $I_2=\int\left(e^{2x-1}-\dfrac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x=\dfrac{e^{2x-1}}{2}+\dfrac{1}{x}+C$

» Chọn SAI.

(c) $I_1+I_2=e^x+\dfrac{e^{2x-1}}{2}+C$.

Ta có: $I_1+I_2=\int\left(e^x+\dfrac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x+\int\left(e^{2x-1}-\dfrac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x=\int\left(e^x+e^{2x-1}\right)\mathrm{d}x=e^x+\dfrac{e^{2x-1}}{2}+C$

» Chọn ĐÚNG.

(d) Gọi $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)$, với $f(x)=e^x+\dfrac{1}{x^2}$. Nếu $F(1)=e$ thì $F(\ln 2)=1-\dfrac{1}{\ln 2}$.

Ta có: $I_1=\int\left(e^x+\dfrac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x=e^x-\dfrac{1}{x}+C$. Vì $F(1)=e\Rightarrow e-1+C=e\Rightarrow C=1$.

$F(x)=e^x-\dfrac{1}{x}+1\Rightarrow F(\ln 2)=e^{\ln 2}-\dfrac{1}{\ln 2}+1=2-\dfrac{1}{\ln 2}+1=3-\dfrac{1}{\ln 2}$.

» Chọn SAI.

» Câu 31. Cho hàm số $f(x)=4\cos^2\dfrac{x}{2}$. Các khẳng định sau đây đúng hay sai?

	Mệnh đề	**Đúng**	**Sai**
(a)	$\int f(x)\mathrm{d}x=-2\sin x+C$		
(b)	Biết rằng $\int f(x)\mathrm{d}x=ax+b\sin x+C, a,b\in\mathbb{Z}$, khi đó $a+b=4$.		
(c)	Nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)$ thỏa mãn $F(0)=1$ là $F(x)=2(x+\sin x)+1$.		
(d)	Nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)$ thỏa mãn $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$ là $F(x)=2(x+\sin x)-\pi$.		

Lời giải

(a) $\int f(x)\mathrm{d}x=-2\sin x+C$.

Ta có: $(-2\sin x+C)'=-4\cos x\neq 4\cos^2\dfrac{x}{2}$ nên hàm số $F(x)=-2\sin x$ không phải là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ đã cho.

» Chọn SAI.

(b) Biết rằng $\int f(x)\mathrm{d}x=ax+b\sin x+C, a,b\in\mathbb{Z}$, khi đó $a+b=4$.

Ta có: $\int f(x)\mathrm{d}x=\int 4\cos^2\dfrac{x}{2}\mathrm{d}x=\int 4.\dfrac{1+\cos x}{2}\mathrm{d}x=2\int(1+\cos x)\mathrm{d}x=2(x+\sin x)+C$.

Suy ra: $\begin{cases}a=2\\b=2\end{cases}\Rightarrow a+b=4$.

» Chọn ĐÚNG.

(c) Nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)$ thỏa mãn $F(0)=1$ là $F(x)=2(x+\sin x)+1$.

Theo câu **(b)** ta có: $F(x)=2(x+\sin x)+C$.

Vì $F(0)=1$ nên $C=1$.

Vậy ta có: $F(x)=2(x+\sin x)+1$.

» Chọn ĐÚNG.

(d) *Nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ là $F(x)=2(x+\sin x)-\pi$.*

Theo câu **(b)** ta có: $F(x)=2(x+\sin x)+C$.

Vì $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$ nên $2\left(\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{2}\right)+C=0 \Leftrightarrow C=-\pi-2$.

Vậy ta có: $F(x)=2(x+\sin x)-\pi-2$.

» Chọn SAI.

» Câu 32. Cho hàm số $f(x)=2x-3\cos x$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$f(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $g(x)=2+3\sin x$		
(b)	Một nguyên hàm của hàm số $f(x)=2x-3\cos x$ là $h(x)=x^2+3\sin x+2024$		
(c)	Nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)$ thoả mãn điều kiện $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=3$ là $F(x)=x^2-3\sin x+6-\frac{\pi^2}{4}$		
(d)	$f(x)=2x-3\cos x$ là một nguyên hàm của hàm số $k(x).\mathrm{e}^x$, họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $k'(x).\mathrm{e}^x$ là $3\sin x+3\cos x+2x+C$		

Lời giải

(a) *$f(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $g(x)=2+3\sin x$.*

Có $f'(x)=2+3\sin x=g(x) \Rightarrow f(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $g(x)=2+3\sin x$.

» Chọn ĐÚNG.

(b) *Một nguyên hàm của hàm số $f(x)=2x-3\cos x$ là $h(x)=x^2+3\sin x+2024$.*

$h(x)$ không phải là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=2x-3\cos x$,

Vì $h'(x)=2x+3\cos x \neq f(x)$.

» Chọn SAI.

(c) *Nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)$ thoả mãn điều kiện $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=3$ là $F(x)=x^2-3\sin x+6-\frac{\pi^2}{4}$.*

Ta có $\int(2x-3\cos x)\mathrm{d}x=x^2-3\sin x+C \Rightarrow F(x)=x^2-3\sin x+C$.

$F\left(\frac{\pi}{2}\right)=3 \Leftrightarrow \frac{\pi^2}{4}-3+C=3 \Leftrightarrow C=6-\frac{\pi^2}{4}$

Vậy $F(x)=x^2-3\sin x+6-\frac{\pi^2}{4}$.

» Chọn ĐÚNG.

(d) *$f(x)=2x-3\cos x$ là một nguyên hàm của hàm số $k(x).\mathrm{e}^x$, họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $k'(x).\mathrm{e}^x$ là $3\sin x+3\cos x+2x+C$.*

$2x-3\cos x$ là một nguyên hàm của hàm số $k(x).\mathrm{e}^x$

$\Rightarrow (2x-3\cos x)' = k(x).\mathrm{e}^x \Leftrightarrow 2+3\sin x = k(x).\mathrm{e}^x \Leftrightarrow k(x) = \dfrac{2+3\sin x}{\mathrm{e}^x}$

$\Rightarrow k'(x) = \dfrac{(3\cos x-3\sin x-2).\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x)^2} = \dfrac{3\cos x-3\sin x-2}{\mathrm{e}^x}$

$\Rightarrow k'(x).\mathrm{e}^x = 3\cos x-3\sin x-2$

$\Rightarrow \int k'(x).\mathrm{e}^x\mathrm{d}x = \int(3\cos x-3\sin x-2)\mathrm{d}x = 3\sin x+3\cos x-2x+C$.

» Chọn SAI.

» Câu 33. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)=8x^3+\sin x, \forall x\in\mathbb{R}$. Xét tính đúng, sai của các phát biểu sau:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Hàm số $y=f(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f'(x)$.		
(b)	Biết $f(0)=3$. Khi đó, $f(x)=2x^4-\cos x+3$.		
(c)	$\int f(x)\mathrm{d}x = \int(2x^4-\cos x+3)\mathrm{d}x = \frac{2}{5}x^5-\sin x+3x+C$, với C là hằng số.		
(d)	Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ thoả mãn $F(0)=2$. Khi đó, $F(1)=\frac{32}{5}-\sin 1$.		

Lời giải

(a) Hàm số $y=f(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f'(x)$.

» Chọn ĐÚNG.

(b) Biết $f(0)=3$. Khi đó, $f(x)=2x^4-\cos x+3$.

Ta có: $\int f'(x)\mathrm{d}x = \int(8x^3+\sin x)\mathrm{d}x = 2x^4-\cos x+C_1$

Hàm số $y=f(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f'(x)$ và $f(0)=3$

$\Rightarrow \begin{cases} f(x)=2x^4-\cos x+C_1 \\ f(0)=3 \end{cases}$

Vì $f(0)=3 \Rightarrow C_1=4 \Rightarrow f(x)=2x^4-\cos x+4$.

» Chọn SAI.

(c) $\int f(x)\mathrm{d}x = \int(2x^4-\cos x+3)\mathrm{d}x = \frac{2}{5}x^5-\sin x+3x+C$, với C là hằng số.

$\int f(x)\mathrm{d}x = \int(2x^4-\cos x+4)\mathrm{d}x = \frac{2}{5}x^5-\sin x+4x+C$

» Chọn SAI.

(d) Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ thoả mãn $F(0)=2$. Khi đó, $F(1)=\frac{32}{5}-\sin 1$.

Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ thoả mãn $F(0)=2$.

$$\Rightarrow \begin{cases} F(x)=\frac{2}{5}x^5-\sin x+4x+C \\ F(0)=2 \end{cases}$$

Vì $F(0)=2 \Rightarrow C=2 \Rightarrow F(x)=\frac{2}{5}x^5-\sin x+4x+2 \Rightarrow F(1)=\frac{32}{5}-\sin 1$

» Chọn ĐÚNG.

» Câu 34. Biết $F(x)=3x^2+2x-\ln x+C, x\in(0;+\infty)$ là hàm của hàm số $f(x)$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$f(x)=6x+2-\frac{1}{x}, x\in(0;+\infty)$.		
(b)	$F(1)=3$ .Khi đó $F(2)=14-\ln 2$		
(c)	$f(1)=1$		
(d)	Bất phương trình $f(x)+\frac{1}{x}-8<0$ có tập nghiệm là $(-\infty;1)$		

Lời giải

(a) $f(x)=6x+2-\frac{1}{x}, x\in(0;+\infty)$.

$$f(x)=F'(x)=6x+2-\frac{1}{x}, x\in(0;+\infty)$$

» Chọn ĐÚNG.

(b) $F(1)=3$ *.Khi đó* $F(2)=14-\ln 2$

$F(1)=3 \Leftrightarrow 3+2+C=3 \Leftrightarrow C=-2$

Suy ra $F(x)=3x^2+2x-\ln x-2, x\in(0;+\infty)$

Vậy $F(2)=14-\ln 2$

» Chọn ĐÚNG.

(c) $f(1)=1$.

$f(x)=6x+2-\frac{1}{x}, x\in(0;+\infty)$. Suy ra $f(1)=7$

» Chọn SAI.

(d) Bất phương trình $f(x)+\frac{1}{x}-8<0$ *có tập nghiệm là* $(-\infty;1)$.

$$f(x)=6x+2-\frac{1}{x}, x\in(0;+\infty).$$

$$\begin{cases} f(x)+\frac{1}{x}-8<0 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x+2-\frac{1}{x}+\frac{1}{x}-8<0 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow 0<x<1$$

Vậy tập nghiệm bất phương trình là $(0;1)$

» Chọn SAI.

» Câu 35. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{x^2+1}{x}$ trên khoảng $(0;+\infty)$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$F(x)=\frac{x^2}{2}+\ln x+2025$		
(b)	Biết $F(1)=\frac{3}{2}$, khi đó $F(e)=\frac{e^2}{2}+1$		
(c)	$F(x)=f'(x),\forall x\in(0;+\infty)$		
(d)	Biết rằng đồ thị của hàm số $F(x)$ đi qua $M\left(e;\frac{e^2}{2}\right)$. Khi đó $F(1)=\frac{1}{2}$		

Lời giải

(a) $F(x)=\frac{x^2}{2}+\ln x+2025$.

$$F(x)=\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int\frac{x^2+1}{x}\mathrm{d}x=\int\left(x+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}+\ln x+C$$

$$F(x)=\frac{x^2}{2}+\ln x+C$$

Một nguyên hàm $F(x)=\frac{x^2}{2}+\ln x+2025$

» Chọn ĐÚNG.

(b) Biết $F(1)=\frac{3}{2}$, khi đó $F(e)=\frac{e^2}{2}+1$

$$F(x)=\frac{x^2}{2}+\ln x+C$$

$F(1)=\frac{3}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{2}+C=\frac{3}{2}\Leftrightarrow C=1$. Suy ra $F(x)=\frac{x^2}{2}+\ln x+1$

Vậy $F(e)=\frac{e^2}{2}+2$

» Chọn SAI.

(c) $F(x)=f'(x),\forall x\in(0;+\infty)$

Theo định nghĩa nguyên hàm $F(x)$là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ khi và chỉ khi $F'(x)=f(x)$

» Chọn SAI.

(d) Biết rằng đồ thị của hàm số $F(x)$ đi qua $M\left(e;\frac{e^2}{2}\right)$. Khi đó $F(1)=\frac{1}{2}$

$F(x)=\frac{x^2}{2}+\ln x+C$, đồ thị của hàm số $F(x)$ đi qua $M\left(e;\frac{e^2}{2}\right)$ nên ta có phương trình

$$\frac{e^2}{2}=\frac{e^2}{2}+\ln e+C\Leftrightarrow C=-1$$

$F(x)=\frac{x^2}{2}+\ln x-1$. Suy ra $F(1)=\frac{1}{2}+\ln 1-1=-\frac{1}{2}$

» Chọn SAI.

» Câu 36. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định trên $\left(-\infty;0\right)$. Biết rằng $f'\left(x\right)=2x+\frac{1}{x^2}$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$f\left(1\right)=2$. Khi đó $f\left(x\right)=x^2-\frac{1}{x}+2$.		
(b)	$f\left(1\right)=0$. Phương trình $f\left(x\right)=0$ có hai nghiệm		
(c)	Đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ đi qua điểm $M\left(-1;2\right)$. Khi đó $f\left(2\right)=\frac{13}{2}$		
(d)	$f\left(-2\right)=\frac{1}{4}$. Hàm số $g\left(x\right)=xf\left(x\right)$ có 3 điểm cực trị.		

Lời giải

(a) *$f\left(1\right)=2$. Khi đó $f\left(x\right)=x^2-\frac{1}{x}+2$.*

$$f\left(x\right)=\int f'\left(x\right)=\int\left(2x+\frac{1}{x^2}\right)dx=x^2-\frac{1}{x}+C$$

$$f\left(1\right)=2\Rightarrow C=2$$

Suy ra $f\left(x\right)=x^2-\frac{1}{x}+2$

» Chọn ĐÚNG.

(b) *$f\left(1\right)=0$. Phương trình $f\left(x\right)=0$ có hai nghiệm.*

$$f\left(x\right)=\int f'\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\left(2x+\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x=x^2-\frac{1}{x}+C$$

$$f\left(1\right)=0\Rightarrow C=0$$

Suy ra $f\left(x\right)=0\Leftrightarrow x^2-\frac{1}{x}=0\Leftrightarrow x^3-1=0\Leftrightarrow x=1$

Vậy phương trình $f\left(x\right)=0$ có duy nhất một nghiệm.

» Chọn SAI.

(c) *Đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ đi qua điểm $M\left(-1;2\right)$. Khi đó $f\left(2\right)=\frac{13}{2}$*

$$f\left(x\right)=\int f'\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\left(2x+\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x=x^2-\frac{1}{x}+C.$$

Đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ đi qua điểm $M\left(-1;5\right)$ ta được $2+C=5\Rightarrow C=3$

Suy ra $f\left(x\right)=x^2-\frac{1}{x}+3$

$$f\left(2\right)=2^2-\frac{1}{2}+3=\frac{13}{2}$$

» Chọn ĐÚNG.

(d) *$f\left(-2\right)=\frac{1}{4}$. Hàm số $g\left(x\right)=xf\left(x\right)$ có 3 điểm cực trị.*

$$f\left(-2\right)=\frac{1}{4}\Leftrightarrow 4+\frac{1}{4}+C=\frac{1}{4}\Leftrightarrow C=-4.$$

$f(x)=x^2-\dfrac{1}{x}-4$

$g(x)=xf(x)=x\left(x^2-\dfrac{1}{x}-4\right)=x^3-4x$

$g'(x)=3x^2-4$, $g'(x)=0\Leftrightarrow x=\pm\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$, nên hàm số $y=g(x)$ có 2 điểm cực trị.

» Chọn SAI.

» Câu 37. Cho hàm số $f(x)$, biết $f'(x)=\dfrac{x+1}{x^2}$, biết $f(-2)=\dfrac{3}{2}$ và $f(2)=2\ln 2-\dfrac{3}{2}$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng ? Khẳng định nào sai ?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Hàm số $f(x)=\ln\lvert x\rvert-\dfrac{1}{x}+C$, với C là hằng số.		
(b)	Hàm số $f(x)=\begin{cases}\ln x-\dfrac{1}{x}+C_1, & \text{khi } x>0\\ \ln(-x)-\dfrac{1}{x}+C_2, & \text{khi } x<0\end{cases}$, với C_1, C_2 là hằng số.		
(c)	Giá trị $f(-1)=2-\ln 2$		
(d)	Giá trị $f(4)=3\ln 2$		

Lời giải

(a) Hàm số $f(x)=\ln\lvert x\rvert-\dfrac{1}{x}+C$, với C là hằng số.

Ta có: $f(x)=\displaystyle\int\frac{x+1}{x^2}\mathrm{d}x=\int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x=\ln\lvert x\rvert-\frac{1}{x}+C$

» Chọn ĐÚNG.

(b) Hàm số $f(x)=\begin{cases}\ln x-\dfrac{1}{x}+C_1, & \text{khi } x>0\\ \ln(-x)-\dfrac{1}{x}+C_2, & \text{khi } x<0\end{cases}$, với C_1, C_2 là hằng số.

Ta có: $f(x)=\ln\lvert x\rvert-\dfrac{1}{x}+C$, nên ta có hai trường hợp $\lvert x\rvert=\begin{cases}x, & \text{khi } x>0\\ -x, & \text{khi } x<0\end{cases}$

$\Rightarrow f(x)=\begin{cases}\ln x-\dfrac{1}{x}+C_1, & \text{khi } x>0\\ \ln(-x)-\dfrac{1}{x}+C_2, & \text{khi } x<0\end{cases}$

» Chọn ĐÚNG

(c) Giá trị $f(-1)=2-\ln 2$.

Từ dữ kiện đề bài ta có: $\begin{cases}f(-2)=\dfrac{3}{2}\\ f(2)=2\ln 2-\dfrac{3}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\ln 2+\dfrac{1}{2}+C_2=\dfrac{3}{2}\\ \ln 2-\dfrac{1}{2}+C_1=2\ln 2-\dfrac{3}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}C_2=1-\ln 2\\ C_1=\ln 2-1\end{cases}$

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases}\ln x-\dfrac{1}{x}+\ln 2-1, & khi\ x>0\\ \ln(-x)-\dfrac{1}{x}+1-\ln 2, & khi\ x<0\end{cases}$$. Giá trị $f(-1)=\ln 1+1+1-\ln 2=2-\ln 2$

» Chọn ĐÚNG.

(d) *Giá trị* $f(4)=3\ln 2$

Ta có: $f(4)=\ln 4-\dfrac{1}{4}+\ln 2-1=3\ln 2-\dfrac{5}{4}$

» Chọn SAI

» Câu 38. Một vật chuyển động đều với vận tốc có phương trình $v(t)=t^2-2t+1$, trong đó t được tính bằng giây , quãng đường $s(t)$ được tính bằng mét. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng ? Khẳng định nào sai ?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Quãng đường đi được của vật sau 2 giây là: $\dfrac{2}{3}(m)$		
(b)	Quãng đường vật đi được khi gia tốc bị triệt tiêu là $\dfrac{1}{3}(m)$		
(c)	Quãng đường vật đi được trong khoảng từ 2 giây đến thời gian mà vận tốc đạt $9(m/s)$ là: $\dfrac{26}{3}\ (m)$		
(d)	Quãng đường vật đi được từ 0 giây đến thời gian mà gia tốc bằng $10(m/s^2)$ là $44(m)$		

Lời giải

(a) *Quãng đường đi được của vật sau 2 giây là:* $\dfrac{2}{3}(m)$

Ta có quãng đường vật đi được sau 2 giây là: $s(t)=\int_0^2 v(t)dt=\int_0^2(t^2-2t+1)dt=\dfrac{2}{3}(m)$

» Chọn ĐÚNG.

(b) *Quãng đường vật đi được khi gia tốc bị triệt tiêu là* $\dfrac{1}{3}(m)$

Ta có: gia tốc $a(t)=v'(t)=2t-2$, do gia tốc bị triệt tiêu $\Leftrightarrow a(t)=0\Leftrightarrow 2t-2=0\Leftrightarrow t=1(s)$

Quãng đường vật đi được sau 1 giây là: $s(t)=\int_0^1 v(t)dt=\int_0^1(t^2-2t+1)dt=\dfrac{1}{3}(m)$

» Chọn ĐÚNG

(c) *Quãng đường vật đi được trong khoảng từ 2 giây đến thời gian mà vận tốc đạt $9(m/s)$ là:* $\dfrac{26}{3}\ (m)$

Ta có: vận tốc đạt $9(m/s)\ \Leftrightarrow v(t)=9\Leftrightarrow t^2-2t+1=9\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=4\\t=-2\end{array}\right.\Rightarrow t=4$ (nhận)

Quãng đường vật đi được trong khoảng từ 2 giây đến 4 giây là

$s(t)=\int_2^4 v(t)dt=\int_2^4(t^2-2t+1)dt=\dfrac{26}{3}\ (m)$

» **Chọn** ĐÚNG

(d) Quãng đường vật đi được từ 0 giây đến thời gian mà gia tốc bằng $10\left(m/s^2\right)$ là $44\left(m\right)$

Ta có: gia tốc $a\left(t\right)=10\Leftrightarrow 2t-2=10\Leftrightarrow t=6\left(s\right)$

Quãng đường vật đi được từ 0 giây đến 6 giây là $s\left(t\right)=\int_0^6 v\left(t\right)dt=\int_0^6\left(t^2-2t+1\right)dt=42\left(m\right)$

» **Chọn** SAI

» **Câu 39.** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị là $\left(C\right)$. Xét điểm $M\left(x;f\left(x\right)\right)$ thay đổi trên $\left(C\right)$. Biết rằng, hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị $\left(C\right)$ tại M là $k_M=3x^2+2x-2$ và điểm M trùng với gốc tọa độ khi nó nằm trên trục tung.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị $\left(C\right)$ tại điểm có hoành độ $x=-1$ là $k=-1$.		
(b)	$f\left(1\right)=0$		
(c)	Điểm $B\left(2;7\right)$ thuộc đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$.		
(d)	Hàm số $F\left(x\right)=\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{x^3}{3}-x^2+1$ là một nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)$.		

Lời giải

Hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị $\left(C\right)$ tại M là $k_M=3x^2+2x-2$

$\Rightarrow f\left(x\right)=\int\left(3x^2+2x-2\right)dx=x^3+x^2-2x+c$.

Ta có điểm M trùng với gốc tọa độ khi nó nằm trên trục tung

$\Rightarrow f\left(0\right)=0$

$\Rightarrow 0^3+0^2-2.0+c=0\Rightarrow c=0$.

Vậy $f\left(x\right)=x^3+x^2-2x$.

(a) Hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị $\left(C\right)$ tại điểm có hoành độ $x=-1$ là $k=-1$.

Hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị $\left(C\right)$ tại điểm có hoành độ $x=-1$ là

$k=3.\left(-1\right)^2+2.\left(-1\right)-2=-1$.

» **Chọn** ĐÚNG

(b) $f\left(1\right)=0$.

$f\left(1\right)=1^3+1^2-2.1=0$.

» **Chọn** ĐÚNG

(c) Điểm $B\left(2;7\right)$ thuộc đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$.

Ta có $f\left(2\right)=2^3+2^2-2.2=8$.

Vậy điểm $B\left(2;7\right)$ không thuộc đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$.

» **Chọn** SAI

(d) Hàm số $F\left(x\right)=\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{x^3}{3}-x^2+1$ là một nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)$.

Ta có $F'(x)=x^3+x^2-2x=f(x)$.

Vậy hàm số $F(x)=\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-x^2+1$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$.

» Chọn ĐÚNG

» Câu 40. Một ô tô đang chạy với tốc độ $72\ km/h$ thì người lái xe bất ngờ phát hiện chướng ngại vật trên đường. Người lái xe phản ứng một giây sau đó bằng cách đạp phanh khẩn cấp. Kể từ thời điểm này, ô tô chuyển động chậm dần đều với tốc độ $v(t)=-10t+30\ (m/s)$, trong đó t là thời gian tính bằng giây kể từ lúc đạp phanh. Gọi $s(t)$ là quãng đường xe ô tô đi được trong $t\ (s)$ kể từ lúc đạp phanh.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Công thức biểu diễn hàm số $s(t)=-5t^2+30t+72\ (m)$		
(b)	Thời gian kể từ lúc đạp phanh đến khi xe ô tô dừng hẳn là 3 giây		
(c)	Sau 3 giây kể từ lúc đạp phanh, quãng đường xe ô tô di chuyển được là $45\ (m)$		
(d)	Quãng đường xe ô tô đã di chuyển kể từ lúc người lái xe phát hiện chướng ngại vật trên đường đến khi xe ô tô dừng hẳn là $120\ (m)$		

Lời giải

(a) *Công thức biểu diễn hàm số* $s(t)=-5t^2+30t+72\ (m)$.

Ta có $s(t)=\int v(t)\mathrm{d}t=\int(-10t+30)\mathrm{d}t=-5t^2+30t+C$.

Do $s(0)=0$ nên $C=0$.

Vậy $s(t)=-5t^2+30t\ (m)$.

» Chọn SAI

(b) *Thời gian kể từ lúc đạp phanh đến khi xe ô tô dừng hẳn là 3 giây.*

Xe ô tô dừng hẳn khi $v(t)=0 \Leftrightarrow -10t+30=0 \Leftrightarrow t=3$.

» Chọn ĐÚNG

(c) *Sau 3 giây kể từ lúc đạp phanh, quãng đường xe ô tô di chuyển được là* $45\ (m)$.

Sau 3 giây kể từ lúc đạp phanh, quãng đường xe ô tô di chuyển được là

$$s(3)=-5.3^2+30.3=45\ (m).$$

» Chọn ĐÚNG

(d) *Quãng đường xe ô tô đã di chuyển kể từ lúc người lái xe phát hiện chướng ngại vật trên đường đến khi xe ô tô dừng hẳn là* $120\ (m)$.

Ta có $72\ km/h=20\ m/s$.

Vậy quãng đường xe ô tô đã di chuyển kể từ lúc người lái xe phát hiện chướng ngại vật trên đường đến khi xe ô tô dừng hẳn là $20+45=65\ (m)$.

» Chọn SAI

C. Câu hỏi – Trả lời ngắn

» Câu 41. Cho $F(x)$ là họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sin x-\cos x+\dfrac{2}{\cos^2 x}$, $F(0)=1$. Giá trị $F(\pi)$ bằng

Lời giải

✓ ***Trả lời: 3***

Ta có $F(x)=\int f(x)\mathrm{d}x=\int\left(\sin x-\cos x+\dfrac{2}{\cos^2 x}\right)\mathrm{d}x=-\cos x-\sin x+2\tan x+C$

Mà $F(0)=1\Rightarrow-\cos 0-\sin 0+2\tan 0+C=1\Leftrightarrow C=2\Rightarrow F(x)=-\cos x-\sin x+2\tan x+2$

$\Rightarrow F(\pi)=-\cos\pi-\sin\pi+2\tan\pi+2=3$.

» Câu 42. Cho $F(x)$ là họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=e^x-2x+1$, $F(0)=2$. Tính giá trị $F(1)$ *(làm tròn kết quả đến số thập phân thứ hai)*

Lời giải

✓ ***Trả lời: 3,72***

Ta có $F(x)=\int f(x)\mathrm{d}x=\int\left(e^x-2x+1\right)\mathrm{d}x=e^x-x^2+x+C$

Mà $F(0)=2\Rightarrow 1-0+0+C=2\Leftrightarrow C=1\Rightarrow F(x)=e^x-x^2+x+1$

$\Rightarrow F(1)=e-1+1+1=e+1\approx 3.71828$.

» Câu 43. Cho hàm số $f(x)$ có nguyên hàm trên $\mathbb{R}$, và thỏa mãn $\int f(3+x)dx=e^x+\ln\left(x^2+1\right)$. Tính $f(-2)$(kết quả làm tròn đến hai chữ số sau dấu phẩy)

Lời giải

✓ ***Trả lời: -0,4***

Gọi $F(x+3)$ là họ nguyên hàm của hàm số $f(3+x)$

$\Rightarrow\int f(3+x)dx=F(3+x)=e^x+\ln\left(x^2+1\right)$

$\Rightarrow F'(3+x)=f(3+x)\Rightarrow f(3+x)=e^x+\dfrac{2x}{x^2+1}$

Đặt $t=3+x\Rightarrow x=t-3$

$\Rightarrow f(t)=e^{t-3}+\dfrac{2(t-3)}{(t-3)^2+1}=e^{t-3}+\dfrac{2t-6}{t^2-6t+10}\Rightarrow f(x)=e^{x-3}+\dfrac{2x-6}{x^2-6x+10}$

$f(-2)=e^{-2-3}+\dfrac{-10}{26}=e^{-5}-\dfrac{5}{13}\approx-0,4$.

» Câu 44. Cho $F(x)=\left(ax^2+bx+c\right)\mathrm{e}^{-x}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\left(x^2-3x+2\right)\mathrm{e}^{-x}$. Tính tổng $S=a+2b-c$?

Lời giải

✓ ***Trả lời: 2***

Ta có: $F'(x)=(2ax+b)\mathrm{e}^{-x}-\left(ax^2+bx+c\right)\mathrm{e}^{-x}=\left[-ax^2+(2a-b)x+(b-c)\right]\mathrm{e}^{-x}$

Yêu cầu bài toán thỏa mãn khi và chỉ khi $\begin{cases}-a=1\\2a-b=-3\\b-c=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\b=1\\c=-1\end{cases}$.

Vậy $S=-1+2.1-(-1)=2$.

» **Câu 45.** Cây cà chua khi trồng có chiều cao $5\ cm$. Tốc độ tăng chiều cao của cây cà chua sau khi trồng được cho bởi hàm số: $v(t)=-0{,}1t^3+t^2$, trong đó t tính theo tuần, $v(t)$ tính bằng centimét/tuần. Gọi $h(t)$ là độ cao của cây cà chua ở tuần thứ t. Chiều cao cây cà chua sau 2 tuần là bao nhiêu? *Làm tròn kết quả đến số thập phân thứ 2*

Lời giải

✓ ***Trả lời: 7,27***

Ta có $h(t)=\int v(t)\mathrm{d}t=\int\left(-0{,}1t^3+t^2\right)\mathrm{d}t=-\frac{1}{40}t^4+\frac{1}{3}t^3+C$.

Theo giả thiết, $h(0)=5 \Leftrightarrow C=5 \Rightarrow h(t)=-\frac{1}{40}t^4+\frac{1}{3}t^3+5\ (cm)$.

Vậy $h(2)=-\frac{1}{40}.2^4+\frac{1}{3}.2^3+5=\frac{109}{15}\ (cm)\approx 7{,}27$.

» **Câu 46.** Khi được thả từ độ cao 20 m, một vật rơi với gia tốc không đổi $a=10\,m/s^2$. Sau khi rơi được t giây thì vật có tốc độ bao nhiêu?

Lời giải

✓ ***Trả lời: 20***

Kí hiệu $v(t)$ là tốc độ của vật, $s(t)$ là quãng đường vật đi được cho đến thời điểm t giây kể từ khi vật bắt đầu rơi.

Vì $a(t)=v'(t)$ với mọi $t\ge 0$ nên $v(t)=\int a(t)\mathrm{d}t=\int 10\mathrm{d}t=10t+C$.

Ta có $v(0)=0$ nên $10.0+C=0$ hay $C=0$. Vật $v(t)=10t\,(m/s)$

Vì $v(t)=s'(t)$ với mọi $t\ge 0$ nên $s(t)=\int v(t)\mathrm{d}t=\int 10t\,\mathrm{d}t=5t^2+C$.

Ta có $s(0)=0$ nên $5.0^2+C=0$ hay $C=0$. Vậy $s(t)=5t^2\,(m)$.

Vật rơi từ độ cao 20 m nên $s(t)\le 20 \Leftrightarrow 5t^2\le 20 \Leftrightarrow 0\le t\le 2$ (giây).

Vậy tốc độ vật rơi theo yêu cầu đề bài là $v(2)=20\,m/s$.

Chương 04

Bài 2. TÍCH PHÂN

A. Lý thuyết

1. Hình thang cong

Định nghĩa:

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và *không âm* trên đoạn $[a;b]$.

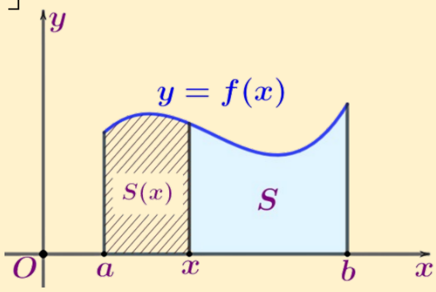
Hình phẳng giới hạn bởi:

» đồ thị hàm số $y = f(x)$,

» trục hoành,

» hai đường thẳng $x = a, x = b$

được gọi là hình thang cong.



2. Diện tích hình thang cong

Định nghĩa:

Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục và không âm trên đoạn $[a;b]$ thì diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi:

» đồ thị hàm số $y = f(x)$,

» trục hoành,

» hai đường thẳng $x = a, x = b$

được tính bởi:

$$S = F(b) - F(a)$$

✓ Trong đó $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$.

3. Định nghĩa tích phân

Định nghĩa:

Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $\left[a;b\right]$.

Nếu $F\left(x\right)$ là một nguyên hàm của $f\left(x\right)$ trên đoạn $\left[a;b\right]$ thì hiệu số $F\left(b\right)-F\left(a\right)$ gọi là tích phân từ a đến b của hàm số $f\left(x\right)$, kí hiệu $\int\limits_a^b f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

✓ Viết $\int\limits_a^b f\left(x\right)\mathrm{d}x = F\left(x\right)\Big|_a^b = F\left(b\right)-F\left(a\right)$

✓ Gọi $\int\limits_a^b$ là dấu tích phân; a là cận dưới; b là cận trên,

$f\left(x\right)\mathrm{d}x$ là biểu thức dưới dấu tích phân,

$f\left(x\right)$ là hàm số dưới dấu tích phân

Chú ý

» Trường hợp $a=b$: $\int\limits_a^a f\left(x\right)\mathrm{d}x = 0$

» Trường hợp $a>b$: $\int\limits_a^b f\left(x\right)\mathrm{d}x = -\int\limits_b^a f\left(x\right)\mathrm{d}x$

» Tích phân không phụ thuộc vào biến số x hay t, nghĩa là $\int\limits_a^b f\left(x\right)\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f\left(t\right)\mathrm{d}t$.

4. Ý nghĩa hình học của tích phân

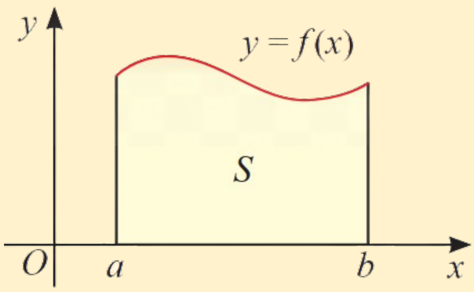
Định nghĩa:

Nếu hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục và không âm trên đoạn $\left[a;b\right]$ thì diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi:

» đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$,

» trục hoành,

» hai đường thẳng $x=a, x=b$



Vậy $S=\int\limits_a^b f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

Chú ý

» Nếu hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ và $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ thì

$$\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x = f(b) - f(a)$$

» Tốc độ $v(t) \geq 0$ tại mọi thời điểm $t \in [a;b]$ thì quãng đường di chuyển trong khoảng thời gian từ a đến b được tính theo công thức:

$$s = s(b) - s(a) = \int_a^b v(t)\,\mathrm{d}t.$$

5. Tính chất tích phân

Tính chất:

(1) Cho hai hàm số $y = f(x), y = g(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Khi đó:

- $\int_a^b [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$
- $\int_a^b [f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$

(2) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$, k là số thực. Khi đó:

- $\int_a^b kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

(3) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$, $c \in (a;b)$. Khi đó

- $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$

B. Các dạng bài tập

Dạng 1. Áp dụng định nghĩa – tính chất

Phương pháp

☑ Áp dụng định nghĩa, tính chất và bảng công thức nguyên hàm cơ bản.

1	$\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$ (Tích phân có hai cận giống nhau thì bằng 0).
2	$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$ (Tích phân đảo cận $\to$ thêm dấu trừ).
3	$\int_a^b k.f(x)\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ với $k \in \mathbb{R}$.
4	$\int_a^b \left[f(x) \pm g(x)\right]\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.
5	Trong đoạn $[a;b]$, tồn tại $c \in [a;b]$ thì $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$.

☑ Ý nghĩa hình học của tích phân:

Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục và không âm trên đoạn $[a;b]$ thì diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi: đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành, hai đường thẳng $x = a, x = b$.

Vậy $S = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Ví dụ 1.1.

Cho $\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x = 5$ và $\int_0^3 g(x)\mathrm{d}x = 2$. Tính:

(1) $\int_0^3 \left[f(x) + g(x)\right]\mathrm{d}x$.

(2) $\int_0^3 \left[f(x) - g(x)\right]\mathrm{d}x$.

(3) $\int_0^3 3f(x)\mathrm{d}x$.

(4) $\int_0^3 \left[2f(x) - 3g(x)\right]\mathrm{d}x$

Lời giải

(1) $\int_0^3 \left[f(x) + g(x)\right]\mathrm{d}x$.

$$\int_0^3 \left[f(x) + g(x)\right]\mathrm{d}x = \int_0^3 f(x)\mathrm{d}x + \int_0^3 g(x)\mathrm{d}x = 5 + 2 = 7.$$

(2) $\int_0^3 \left[f(x)-g(x)\right]dx$.

$$\int_0^3 \left[f(x)-g(x)\right]dx = \int_0^3 f(x)dx - \int_0^3 g(x)dx = 5-2=3.$$

(3) $\int_0^3 3f(x)dx$.

$$\int_0^3 3f(x)dx = 3\int_0^3 f(x)dx = 3.5 = 15.$$

(4) $\int_0^3 \left[2f(x)-3g(x)\right]dx$

$$\int_0^3 \left[2f(x)-3g(x)\right]dx = 2\int_0^3 f(x)dx - 3\int_0^3 g(x)dx = 2.5-3.2=4.$$

Ví dụ 1.2.

Cho $\int_{-2}^{2} f(x)dx = 1$, $\int_{-2}^{4} f(t)dt = -4$. Tính $\int_{2}^{4} f(y)dy$

Lời giải

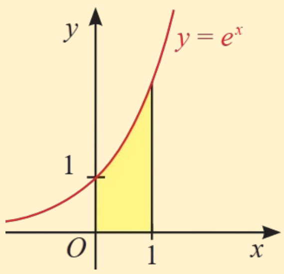
Ta có: $\int_{-2}^{4} f(t)dt = \int_{-2}^{4} f(x)dx$, $\int_{2}^{4} f(y)dy = \int_{2}^{4} f(x)dx$.

Khi đó: $\int_{-2}^{2} f(x)dx + \int_{2}^{4} f(x)dx = \int_{-2}^{4} f(x)dx$.

$\Rightarrow \int_{2}^{4} f(x)dx = \int_{-2}^{4} f(x)dx - \int_{-2}^{2} f(x)dx = -4-1=-5$. Vậy $\int_{2}^{4} f(y)dy = -5$.

Ví dụ 1.3.

Tính diện tích hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x) = e^x$, trục hoành, trục tung và đường thẳng $x = 1$.



Lời giải

$y = f(x) = e^x$ có một nguyên hàm $F(x) = e^x$.

Diện tích hình thang cong là $S = F(1) - F(0) = e^1 - e^0 = e - 1$ (đvdt).

Ví dụ 1.4.

Cho f, g là hai hàm liên tục trên đoạn $[1;3]$ thoả $\int_1^3 [f(x)+3g(x)]\mathrm{d}x = 10$, $\int_1^3 [2f(x)-g(x)]\mathrm{d}x = 6$. Tính $\int_1^3 [f(x)+g(x)]\mathrm{d}x$.

Lời giải

$\int_1^3 [f(x)+3g(x)]\mathrm{d}x = 10 \Leftrightarrow \int_1^3 f(x)\mathrm{d}x + 3\int_1^3 g(x)\mathrm{d}x = 10 \ (1)$.

$\int_1^3 [2f(x)-g(x)]\mathrm{d}x = 6 \Leftrightarrow 2\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x - \int_1^3 g(x)\mathrm{d}x = 6 \ (2)$.

Đặt $X = \int_1^3 f(x)\mathrm{d}x$, $Y = \int_1^3 g(x)\mathrm{d}x$.

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình: $\begin{cases} X+3Y=10 \\ 2X-Y=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X=4 \\ Y=2 \end{cases}$.

Do đó ta được: $\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x = 4$ và $\int_1^3 g(x)\mathrm{d}x = 2$. Vậy $\int_1^3 [f(x)+g(x)]\mathrm{d}x = 4+2=6$.

Ví dụ 1.5.

Cho số thực $a>1$, tính tích phân $\int_0^a |x-1|\mathrm{d}x$ theo a.

Lời giải

Ta có hàm số $f(x)=x-1$ có một nguyên hàm $F(x)=\frac{x^2}{2}-x$

Ta lại có $\int_0^a |x-1|\mathrm{d}x = \int_0^1 |x-1|\mathrm{d}x + \int_1^a |x-1|\mathrm{d}x = \int_0^1 -(x-1)\mathrm{d}x + \int_1^a (x-1)\mathrm{d}x$

$= F(0)-F(1)+F(a)-F(1) = \frac{a^2}{2}-a+1$.

Dạng 2. Tích phân hàm số chứa dấu trị tuyệt đối

Phương pháp

Cách 1:

- Cho $f(x)=0$ tìm nghiệm $\in[a;b]$ giả sử các nghiệm đó là $x_1;x_2;...x_n\in[a;b]$
- Khi đó $I=\int_a^{x_1}|f(x)|dx+\int_{x_1}^{x_2}|f(x)|dx+\int_{x_2}^{x_3}|f(x)|dx+...+\int_{x_n}^{b}|f(x)|dx$

$$\Leftrightarrow I=\left|\int_a^{x_1}f(x)dx\right|+\left|\int_{x_1}^{x_2}f(x)dx\right|+\left|\int_{x_2}^{x_3}f(x)dx\right|+...+\left|\int_{x_n}^{b}f(x)dx\right|$$

- Tính mỗi tích phân thành phần

Cách 2:

- Cho $f(x)=0$ tìm nghiệm $\in[a;b]$.
- Xét dấu $f(x)$ trên $[a;b]$.
- Áp dụng $|A|=\begin{cases}A & khi\ A>0\\ -A & khi\ A<0\end{cases}$ để phá trị tuyệt đối trong $\int_a^b ....$
- Tính mỗi tích phân thành phần

Ví dụ 2.1.

Tính các tích phân sau:

(1) $A=\int_{-2}^{2}|x^2-1|dx$.

(2) $B=\int_{-2}^{1}|x^3+x^2-2x|dx$.

(3) $C=\int_{-1}^{2}|x^3-3x+2|dx$.

(4) $D=\int_{-2}^{2}|x^4-3x^2-4|dx$

Lời giải

(1) $A=\int_{-2}^{2}|x^2-1|dx$.

Xét $f(x)=x^2-1$ trên đoạn $[-2;2]$.

Cho $f(x)=0\Leftrightarrow x^2-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\in[-2;2]\\ x=1\in[-2;2]\end{array}\right.$.

Bảng xét dấu:

x	-2		-1		1		2
x^2-1		+	0	−	0	+	

Do đó:

$$A=\int_{-2}^{2}|x^2-1|dx=\int_{-2}^{-1}(x^2-1)dx+\int_{-1}^{1}(1-x^2)dx+\int_{1}^{2}(x^2-1)dx$$

$$=\left(\frac{x^3}{3}-x\right)\Bigg|_{-2}^{-1}+\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{1}+\left(\frac{x^3}{3}-x\right)\Bigg|_{1}^{2}=\left[\frac{2}{3}-\left(-\frac{2}{3}\right)\right]+\left[\frac{2}{3}-\left(-\frac{2}{3}\right)\right]+\left[\frac{2}{3}-\left(-\frac{2}{3}\right)\right]=4.$$

(2) $B=\int\limits_{-2}^{1}\left|x^3+x^2-2x\right|\mathrm{d}x$.

Xét $f\left(x\right)=x^3+x^2-2x$ trên $\left[-2;1\right]$.

Cho $f\left(x\right)=0\Leftrightarrow x^3+x^2-2x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\in\left[-2;1\right]\\x=0\in\left[-2;1\right]\\x=1\in\left[-2;1\right]\end{array}\right.$.

Bảng xét dấu:

x	-2		0		1
f(x)	0	+	0	−	0

Do đó:

$$B=\int\limits_{-2}^{1}\left|x^3+x^2-2x\right|\mathrm{d}x=\int\limits_{-2}^{0}\left(x^3+x^2-2x\right)\mathrm{d}x-\int\limits_{0}^{1}\left(x^3+x^2-2x\right)\mathrm{d}x$$

$$=\left(\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-x^2\right)\Bigg|_{-2}^{0}-\left(\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-x^2\right)\Bigg|_{0}^{1}=-\left(-\frac{8}{3}\right)-\left(-\frac{5}{12}\right)=\frac{37}{12}.$$

(3) $C=\int\limits_{-1}^{2}\left|x^3-3x+2\right|\mathrm{d}x$.

Xét $f\left(x\right)=x^3-3x-2$ trên $\left[-1;2\right]$.

Cho $f\left(x\right)=0\Leftrightarrow x^3-3x-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\in\left[-1;2\right]\\x=-1\in\left[-1;2\right]\end{array}\right.$.

Bảng xét dấu:

x	-1		2
x^3-3x-2		$-$	

Do đó: $C=-\int\limits_{-1}^{2}\left(x^3-3x-2\right)\mathrm{d}x=-\left(\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2-2x\right)\Bigg|_{-1}^{2}=6-\left(-\frac{3}{4}\right)=\frac{27}{4}$.

(4) $D=\int\limits_{-2}^{2}\left|x^4-3x^2-4\right|\mathrm{d}x$

Xét $f\left(x\right)=x^4-3x^2-4$ trên $\left[-2;2\right]$.

Cho $f\left(x\right)=0\Leftrightarrow x^4-3x^2-4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\in\left[-2;2\right]\\x=-2\in\left[-2;2\right]\end{array}\right.$.

Bảng xét dấu:

x	-2		2
x^4-3x^2-4		$-$	

Do đó: $D=-\int\limits_{-2}^{2}\left(x^4-3x^2-4\right)\mathrm{d}x=-\left(\frac{1}{5}x^5-x^3-4x\right)\Bigg|_{-2}^{2}=\frac{48}{5}-\left(-\frac{48}{5}\right)=\frac{96}{5}$.

Ví dụ 2.2.

Tính các tích phân sau:

(1) $A=\int\limits_{-3}^{5}\left(|x+2|-|x-2|\right)\mathrm{d}x$.

(2) $B=\int\limits_{-1}^{2}\left(x+|1-x|-|x+2|\right)\mathrm{d}x$.

(3) $C=\int\limits_{1}^{5}\dfrac{2|x-2|+1}{x}\mathrm{d}x$.

(4) $D=\int\limits_{0}^{3}\sqrt{x^3-2x^2+x}\mathrm{d}x$

Lời giải

(1) $A=\int\limits_{-3}^{5}\left(|x+2|-|x-2|\right)\mathrm{d}x$.

Ta có bảng xét dấu để phá trị tuyệt đối:

x	-3		-2		2		5
$\lvert x+2\rvert$		$-x-2$	0	$x+2$		$x+2$	
$\lvert x-2\rvert$		$-x+2$		$-x+2$	0	$x-2$	
$\lvert x+2\rvert-\lvert x-2\rvert$		-4		$2x$		4	

Khi đó: $A=\int\limits_{-3}^{5}\left(|x+2|-|x-2|\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{-3}^{-2}-4dx+\int\limits_{-2}^{2}2x\mathrm{d}x+\int\limits_{2}^{5}4\mathrm{d}x=-4x\Big|_{-3}^{-2}+x^2\Big|_{-2}^{2}+4x\Big|_{2}^{5}=8$.

(2) $B=\int\limits_{-1}^{2}\left(x+|1-x|-|x+2|\right)\mathrm{d}x$.

Ta có bảng xét dấu để phá trị tuyệt đối:

x	-1		1		2
$\lvert 1-x\rvert$		$1-x$	0	$x-1$	
$\lvert x+2\rvert$		$x+2$		$x+2$	
$x+\lvert 1-x\rvert-\lvert x+2\rvert$		$-x-1$		$x-3$	

Khi đó:

$$B=\int\limits_{-1}^{2}\left(x+|1-x|-|x+2|\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{1}(-x-1)\mathrm{d}x+\int\limits_{1}^{2}(x-3)\mathrm{d}x$$

$$=\left(-\frac{x^2}{2}-x\right)\Bigg|_{-1}^{1}+\left(\frac{x^2}{2}-3x\right)\Bigg|_{1}^{2}=\left(-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\right)+\left[-4-\left(-\frac{5}{2}\right)\right]=-\frac{7}{2}.$$

(3) $C=\int\limits_{1}^{5}\dfrac{2|x-2|+1}{x}\mathrm{d}x$.

Ta có: $|x-2|=\begin{cases}x-2 & khi\ x\ge 2\\ -x+2 & khi\ x<2\end{cases}$.

Khi đó:

$$I=\int\limits_{1}^{5}\frac{2|x-2|+1}{x}\mathrm{d}x=\int\limits_{1}^{2}\frac{2(2-x)+1}{x}\mathrm{d}x+\int\limits_{2}^{5}\frac{2(x-2)+1}{x}\mathrm{d}x=\int\limits_{1}^{2}\frac{5-2x}{x}\mathrm{d}x+\int\limits_{2}^{5}\frac{2x-3}{x}\mathrm{d}x$$

$$=\int\limits_{1}^{2}\left(\frac{5}{x}-x\right)\mathrm{d}x+\int\limits_{2}^{5}\left(2-\frac{3}{x}\right)\mathrm{d}x=\left(5\ln|x|-x\right)\Big|_{1}^{2}+\left(2x-3\ln|x|\right)\Big|_{2}^{5}=8\ln 2-3\ln 5+4.$$

(4) $D=\int\limits_0^3 \sqrt{x^3-2x^2+x}\,\mathrm{d}x$

$$D=\int\limits_0^3 \sqrt{x^3-2x^2+x}\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^3 \sqrt{x\left(x^2-2x+1\right)}\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^3 \left|x-1\right|\sqrt{x}\,\mathrm{d}x.$$

Ta có: $\left|x-1\right|=\begin{cases} x-1 & khi\ x\geq 1 \\ -x+1 & khi\ x<1 \end{cases}$.

Khi đó:

$$D=\int\limits_0^3 (1-x)\sqrt{x}\mathrm{d}x+\int\limits_0^3 (x-1)\sqrt{x}\mathrm{d}x=\int\limits_0^3\left(x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{3}{2}}\right)\mathrm{d}x+\int\limits_0^3\left(x^{\frac{3}{2}}-x^{\frac{1}{2}}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\left.\left(\frac{2}{3}x\sqrt{x}-\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}\right)\right|_0^1+\left.\left(\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}-\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right)\right|_1^3=\frac{4}{15}+\left[\frac{8\sqrt{3}}{5}-\left(-\frac{4}{15}\right)\right]=\frac{24\sqrt{3}+8}{15}.$$

Dạng 3. Tích phân hàm số cho bởi nhiều công thức

Phương pháp

⌘ Bài toán 1:

Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} g(x) & \text{khi } x\le b \\ h(x) & \text{khi } x>b \end{cases}$ liên tục trên D. Tính $J=\int\limits_a^c f(x)\mathrm{d}x$.

Xét $b\in[a;c]$.

→ **Bước 1.** Kiểm tra hàm số $f(x)$ có liên tục tại $x=b$?

Tức là kiểm tra $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=\lim\limits_{x\to b^+} f(x)=f(b)\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to b^-} g(x)=\lim\limits_{x\to b^+} h(x)=f(b)$

→ **Bước 2.** Tách cận: $J=\int\limits_a^c f(x)\mathrm{d}x=\underbrace{\int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x}_{I_1}+\underbrace{\int\limits_b^c h(x)\mathrm{d}x}_{I_2}$.

→ **Bước 3.** Tính các tích phân $I_1;I_2$ bằng các phương pháp đã học.

⌘ Bài toán 2:

Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} g(x;m) & \text{khi } x\le b \\ h(x;m) & \text{khi } x>b \end{cases}$ liên tục trên D. Tính $J=\int\limits_a^c f(x)\mathrm{d}x$.

Xét $b\in[a;c]$.

→ **Bước 1.** Kiểm tra hàm số $f(x)$ có liên tục tại $x=b$?

Tức là kiểm tra:

$\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=\lim\limits_{x\to b^+} f(x)=f(b)\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to b^-} g(x;m)=\lim\limits_{x\to b^+} h(x;m)=f(b)$

→ **Bước 2.** Tách cận: $J=\int\limits_a^c f(x)\mathrm{d}x=\underbrace{\int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x}_{I_1}+\underbrace{\int\limits_b^c h(x)\mathrm{d}x}_{I_2}$.

→ **Bước 3.** Tính các tích phân $I_1;I_2$ bằng các phương pháp đã học.

Ví dụ 3.1.

Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & \text{khi } x\ge 2 \\ x^2-2x+3 & \text{khi } x<2 \end{cases}$. Tính tích phân $I=\int\limits_1^3 f(x)\mathrm{d}x$?

Lời giải

Ta có $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\left(x^2-1\right)=3 \\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\left(x^2-2x+3\right)=3 \end{cases}$ và $f(2)=3$.

Do đó hàm số đã cho liên tục tại $x=2$.

Ta có: $I=\int\limits_1^3 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_1^2\left(x^2-2x+3\right)\mathrm{d}x+\int\limits_2^3\left(x^2-1\right)\mathrm{d}x=\left.\left(\frac{x^3}{3}-x^2+3x\right)\right|_1^2+\left.\left(\frac{x^3}{3}-x\right)\right|_2^3=\frac{23}{3}$.

Ví dụ 3.2.

Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}3x^2 & \text{khi } 0\le x\le 1\\ 4-x & \text{khi } 1\le x\le 2\end{cases}$. Tính tích phân $\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x$?

Lời giải

Ta có $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(4-x)=3\\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(3x^2)=3\end{cases}$, và $f(1)=3$.

Vì hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}$ nên liên tục tại $x=1$.

Suy ra $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=f(1)$.

Khi đó $\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 3x^2\mathrm{d}x+\int\limits_1^2(4-x)\mathrm{d}x=x^3\Big|_0^1+\left(4x-\dfrac{x^2}{2}\right)\Big|_1^2=1+\left(8-2-4+\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{7}{2}$

Ví dụ 3.3.

Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}0,5x & \text{khi } 0\le x<2\\ 1 & \text{khi } 2\le x<15\\ 4-0,2x & \text{khi } 15\le x\le 20\end{cases}$. Tính $\int\limits_0^{20} f(x)\mathrm{d}x$.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(0,5x)=1=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=f(2)$ và

Do $\lim\limits_{x\to 15^-} f(x)=1=\lim\limits_{x\to 15^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 15^+}(4-0,2x)=f(15)$ nên hàm số liên tục trên đoạn $[0;20]$

Do đó $\int\limits_0^{20} f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_2^{15} f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_{15}^{20} f(x)\mathrm{d}x$

$=\int\limits_0^2 0,5x\,\mathrm{d}x+\int\limits_2^{15}1\mathrm{d}x+\int\limits_{15}^{20}(4-0,2x)\mathrm{d}x=\dfrac{x^2}{4}\Big|_0^2+x\Big|_2^{15}+\left(4x-\dfrac{x^2}{10}\right)\Big|_{15}^{20}=1+13+\dfrac{5}{2}=\dfrac{33}{2}$.

Ví dụ 3.4.

Cho số thực a và hàm số $f(x)=\begin{cases}2x & \text{khi } x\le 0\\ a(x-x^2) & \text{khi } x>0\end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Tính $\int\limits_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x$

Lời giải

Ta có $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(a(x-x^2)\right)=0\\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(2x)=0\end{cases}$, và $f(0)=0$.

Vì hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}$ nên liên tục tại $x=0$.

Khi đó $\int\limits_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^0 f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^0 2x\mathrm{d}x+\int\limits_0^1 a(x-x^2)\mathrm{d}x$

$=(x^2)\Big|_{-1}^0+a\left(\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1=-1+a\left(\dfrac{1}{6}\right)=\dfrac{a}{6}-1$

Dạng 4. Bài toán thực tế

Phương pháp

- **Bài toán chuyển động của một vật**
  - » Một vật chuyển động theo phương trình vận tốc $v(t)$ trong khoảng thời gian $t=a$ đến $t=b$ $(a<b)$ sẽ di chuyển được quãng đường là: $s=\int_a^b v(t)dt$.
  - » Một vật chuyển động có phương trình gia tốc $a(t)$ thì vận tốc của vật đó sau khoảng thời gian $\Delta t=t_2-t_1$ là: $v=\int_{t_1}^{t_2} a(t)dx$.
- **Bài toán ứng dụng tích phân vào tìm các đại lượng vật lý như công, điện lượng,...**
  - » Theo định luật Hooke, lực cần dùng để giữ lò xo giãn thêm x mét từ độ dài tự nhiên là $f(x)=kx$, với k (N/m) là độ cứng của lò xo. Công cần để kéo dãn lò xo từ độ dài ℓ_1 đến độ dài ℓ_2 là: $A=\int_{\ell_1}^{\ell_2} f(x)dx$.
  - » Điện lượng chuyển qua tiết diện của dây dẫn của đoạn mạch trong thời gian từ t_1 đến t_2 là: $Q=\int_{t_1}^{t_2} I(t)dt$.

Ví dụ 4.1.

Một vật chuyển động với vận tốc $10\,m/s$ thì tăng tốc với gia tốc $a(t)=3t+t^2$. Tính quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian 10 giây kể từ lúc bắt đầu tăng tốc.

Lời giải

Hàm vận tốc $v(t)=\int a(t)\mathrm{d}t=\int(3t+t^2)\mathrm{d}t=\frac{3t^2}{2}+\frac{t^3}{3}+C$.

Lấy mốc thời gian $(t=0)$ lúc tăng tốc $\Rightarrow v(0)=10\Rightarrow C=10$.

Ta được: $v(t)=\frac{t^3}{3}+\frac{3t^2}{2}+10$.

Sau 10 giây kể từ lúc tăng tốc, quãng đường vật đi được là:

$$s=\int_0^{10}\left(\frac{t^3}{3}+\frac{3t^2}{2}+10\right)\mathrm{d}x=\left.\left(\frac{t^4}{12}+\frac{t^3}{2}+10t\right)\right|_0^{10}=\frac{4300}{3}m.$$

Ví dụ 4.2.

Một vật chuyển động dọc theo một đường thẳng sao cho vận tốc của nó tại thời điểm t (giây) là $v(t)=t^2-3t+2$ (m/s). Trong khoảng thời gian $1\le t\le 3$

(1) Tìm độ dịch chuyển của vật .

(2) Tìm tổng quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian này.

Lời giải

(1) Tìm độ dịch chuyển của vật .

Độ dịch chuyển của vật trong khoảng thời gian $1\le t\le 3$ là

$$\int_1^3 v(t)\mathrm{d}t=\int_1^3\left(t^2-3t+2\right)\mathrm{d}t=\left.\left(\frac{t^3}{3}-\frac{3t^2}{2}+2t\right)\right|_1^3=\left(\frac{3^3}{3}-\frac{3\cdot 3^2}{2}+2\cdot 3\right)-\left(\frac{1}{3}-\frac{3}{2}+2\right)=\frac{2}{3}.$$

(2) Tìm tổng quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian này.

Tổng quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian $1\le t\le 3$ là

$$\int_1^3\left|v(t)\right|\mathrm{d}t=\int_1^3\left|t^2-3t+2\right|\mathrm{d}t=\int_1^2\left(-t^2+3t-2\right)\mathrm{d}t+\int_2^3\left(t^2-3t+2\right)\mathrm{d}t=\frac{5}{6}+\frac{1}{6}=1.$$

Ví dụ 4.3.

Một vật chuyển động dọc theo một đường thẳng sao cho vận tốc của nó tại thời điểm t (giây) là $v(t)=t^2-t-6$ (m/s). Trong khoảng thời gian $1\le t\le 4$

(1) Tìm độ dịch chuyển của vật .

(2) Tìm tổng quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian này.

Lời giải

(1) Tìm độ dịch chuyển của vật .

Độ dịch chuyển của vật trong khoảng thời gian $1\le t\le 4$ là

$$\int_1^4 v(t)\mathrm{d}t=\int_1^4\left(t^2-t-6\right)\mathrm{d}t=\left.\left(\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}-6t\right)\right|_1^4=\left(\frac{4^3}{3}-\frac{4^2}{2}-6\cdot 4\right)-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}-6\right)=-\frac{9}{2}.$$

(2) Tìm tổng quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian này.

Tổng quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian $1\le t\le 4$ là

$$\int_1^4\left|v(t)\right|\mathrm{d}t=\int_1^4\left|t^2-t-6\right|\mathrm{d}t=\int_1^3\left(-t^2+t+6\right)\mathrm{d}t+\int_3^4\left(t^2-t-6\right)\mathrm{d}t=\frac{22}{3}+\frac{17}{6}=\frac{61}{6}.$$

Ví dụ 4.4.

Giả sử lợi nhuận biên (tính bằng triệu đồng) của một sản phẩm được mô hình hóa bằng công thức $P'(x)=-0,0002x+7,5$. Ở đây $P(x)$ là lợi nhuận (tính bằng triệu đồng) khi bán được x đơn vị sản phẩm.

(1) Tìm sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 50 lên 60 đơn vị sản phẩm.

(2) Tìm sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 100 lên 150 đơn vị sản phẩm.

Lời giải

(1) Tìm sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 50 lên 60 đơn vị sản phẩm.

Ta có sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 50 lên 60 đơn vị sản phẩm là

$$P(60)-P(50)=\int_{50}^{60}P'(x)\mathrm{d}x=\int_{50}^{60}(-0,0002x+7,5)\mathrm{d}x=-\int_{50}^{60}0,0002x\mathrm{d}x+\int_{50}^{60}7,5\mathrm{d}x$$

$$=-0,0001x^2\Big|_{50}^{60}+7,5x\Big|_{50}^{60}=-0,0001\left(60^2-50^2\right)+7,5(60-50)=74,89\text{ (triệu đồng).}$$

(2) Tìm sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 100 lên 150 đơn vị sản phẩm.

Ta có sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 100 lên 150 đơn vị sản phẩm là

$$P(150)-P(100)=\int_{100}^{150}P'(x)\mathrm{d}x=\int_{100}^{150}(-0,0002x+7,5)\mathrm{d}x=-\int_{100}^{150}0,0002x\mathrm{d}x+\int_{100}^{150}7,5\mathrm{d}x$$

$$=-0,0001x^2\Big|_{100}^{150}+7,5x\Big|_{100}^{150}=-0,0001\left(150^2-100^2\right)+7,5(150-100)=373,75\text{ (triệu đồng).}$$

Ví dụ 4.5.

Giả sử lợi nhuận biên (tính bằng triệu đồng) của một sản phẩm được mô hình hóa bằng công thức $P'(x)=-0,0005x+12,2$. Ở đây $P(x)$ là lợi nhuận (tính bằng triệu đồng) khi bán được x đơn vị sản phẩm.

(1) Tìm sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 100 lên 101 đơn vị sản phẩm.

(2) Tìm sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 100 lên 110 đơn vị sản phẩm.

Lời giải

(1) Tìm sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 100 lên 101 đơn vị sản phẩm.

Ta có sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 100 lên 101 đơn vị sản phẩm là

$$P(101)-P(100)=\int_{100}^{101}P'(x)\mathrm{d}x=\int_{100}^{101}(-0,0005x+12,2)\mathrm{d}x=-\int_{100}^{101}0,0005x\mathrm{d}x+\int_{100}^{101}12,2\mathrm{d}x$$

$$=-0,00025x^2\Big|_{100}^{101}+12,2x\Big|_{100}^{101}=-0,00025\left(101^2-100^2\right)+12,2(101-100)\approx 12,15\text{ (triệu đồng).}$$

(2) Tìm sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 100 lên 110 đơn vị sản phẩm.

Ta có sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 100 lên 110 đơn vị sản phẩm là

$$P(110)-P(100)=\int_{100}^{110} P'(x)\mathrm{d}x=\int_{100}^{110}(-0,0005x+12,2)\mathrm{d}x=-\int_{100}^{110}0,0005x\mathrm{d}x+\int_{100}^{110}12,2\mathrm{d}x$$

$$=-0,00025x^2\Big|_{100}^{110}+12,2x\Big|_{100}^{110}=-0,00025\left(110^2-100^2\right)+12,2(110-100)\approx 121,48 \text{ (triệu đồng)}.$$

Ví dụ 4.6.

Giả sử vận tốc v của dòng máu ở khoảng cách r từ tâm của động mạch bán kính R không đổi, có thể được mô hình hóa bởi công thức bên dưới. Tìm vận tốc trung bình (đối với r) của động mạch trong khoảng $0\le r\le R$. So sánh vận tốc trung bình với vận tốc lớn nhất.

(1) $v=\dfrac{k}{2}\left(\dfrac{4}{3}R^2-r^2\right)$, trong đó k là một hằng số.

(2) $v=k\left(R^2-r^2\right)$, trong đó k là một hằng số.

Lời giải

(1) $v=\dfrac{k}{2}\left(\dfrac{4}{3}R^2-r^2\right)$, trong đó k là một hằng số.

Vận tốc trung bình của động mạch là:

$$v_{tb}=\frac{1}{R-0}\int_0^R v(r)\mathrm{d}r=\frac{1}{R}\int_0^R\frac{k}{2}\left(\frac{4}{3}R^2-r^2\right)\mathrm{d}r$$

$$=\frac{1}{6R}\int_0^R\left(4kR^2-3kr^2\right)\mathrm{d}r=\frac{1}{6R}\left(4kR^2r-kr^3\right)\Big|_0^R=\frac{1}{6R}\left(4kR^3-kR^3\right)=\frac{kR^2}{2}.$$

Vì $0\le r\le R$ nên vận tốc của động mạch đạt giá trị lớn nhất là $v_{\max}=\dfrac{2}{3}kR^2$ khi $r=0$.

Do đó $v_{\max}=\dfrac{4}{3}v_{tb}$.

(2) $v=k\left(R^2-r^2\right)$, trong đó k là một hằng số.

Vận tốc trung bình của động mạch là:

$$v_{tb}=\frac{1}{R-0}\int_0^R v(r)dr=\frac{1}{R}\int_0^R k\left(R^2-r^2\right)dr$$

$$=\frac{1}{R}\int_0^R\left(kR^2-kr^2\right)dr=\frac{1}{R}\left(kR^2r-\frac{1}{3}kr^3\right)\Big|_0^R=\frac{1}{R}\left(kR^3-\frac{1}{3}kR^3\right)=\frac{2kR^2}{3}.$$

Vì $0\le r\le R$ nên vận tốc của động mạch đạt giá trị lớn nhất là $v_{\max}=kR^2$ khi $r=0$.

Do đó $v_{\max}=\dfrac{3}{2}v_{tb}$.

Chương 04

Bài 2. TÍCH PHÂN

C Luyện tập

A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm

» **Câu 1.** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$. Chọn mệnh đề đúng.

A. $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$.
B. $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(a)-F(b)$.
C. $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)+F(a)$.
D. $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F^2(b)-F^2(a)$.

Lời giải

Chọn A

Do định nghĩa tích phân.

» **Câu 2.** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$. Chọn mệnh đề **sai**.

A. $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$.
B. $\int_a^a f(x)\mathrm{d}x=1$.
C. $\int_a^a f(x)\mathrm{d}x=0$.
D. $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=-\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int_a^a f(x)\mathrm{d}x=0$ nên $\int_a^a f(x)\mathrm{d}x=1$ sai.

» **Câu 3.** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ và $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$. Chọn mệnh đề đúng.

A. $f(b)-f(a)=\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x$.
B. $F(b)-F(a)=\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x$.
C. $f(b)-f(a)=\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x$.
D. $f'(b)-f'(a)=\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $f(b)-f(a)=\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x$.

» Câu 4. Tính tích phân $\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \cos t \, dt$.

A. 2. **B.** 0. **C.** -2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \cos t \, dt = -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t \, dt = -\left(\sin t\right)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = -\left[\sin\frac{\pi}{2} - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = -2$.

» Câu 5. Tính tích phân $\int_e^a \frac{1}{t} dt$ với $a > e$.

A. $\ln a + 1$. **B.** $1 - \ln a$. **C.** $\ln a - 1$. **D.** $\ln a$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\int_e^a \frac{1}{t} dt = \ln t\Big|_e^a = \ln a - \ln e = \ln a - 1$.

» Câu 6. Nếu $\int_1^3 f(x)dx = 2$ thì $\int_1^3 \left[f(x) + 2x\right]dx$ bằng

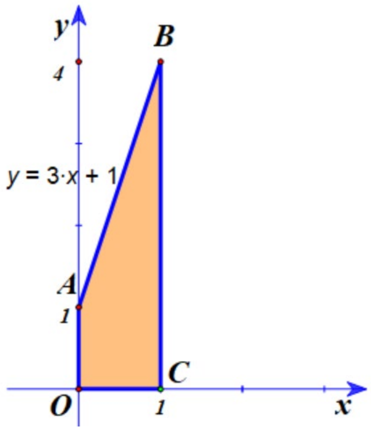
A. 20. **B.** 18. **C.** 12. **D.** 10.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\int_1^3 \left[f(x) + 2x\right]dx = \int_1^3 f(x)dx + \int_1^3 2xdx = 2 + x^2\Big|_1^3 = 2 + (9 - 1) = 10$.

» Câu 7. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình thang $OABC$ giới hạn bởi $y = 3x + 1$, trục Ox và hai đường thẳng $x = 0, x = 1$ (như hình vẽ).



Khi đó $\int_0^1 (3x + 1)dx$ bằng bao nhiêu?

A. $\frac{2}{5}$. **B.** $\frac{5}{2}$. **C.** $\frac{3}{2}$. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int_0^1 (3x+1)\mathrm{d}x$ bằng diện tích hình thang $OABC$ giới hạn bởi $y=3x+1$, trục Ox và hai đường thẳng $x=0, x=1$ (như hình vẽ).

$\int_0^1 (3x+1)\mathrm{d}x = S_{OABC} = \frac{1}{2}.1.(1+4) = \frac{5}{2}$.

» **Câu 8.** Cho $\int_{-2}^{2} f(x)\mathrm{d}x = -1$ và $\int_{-2}^{2} g(x)\mathrm{d}x = 3$. Mệnh đề nào say đây là **đúng**?

A. $\int_{-2}^{2}\left[f(x)+g(x)\right]\mathrm{d}x = 8$.
B. $\int_{-2}^{2}\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x = 4$.
C. $\int_{-2}^{2} 5f(x)\mathrm{d}x = 5$.
D. $\int_{-2}^{2}\left[3f(x)-4g(x)\right]\mathrm{d}x = -15$.

Lời giải

Chọn D

➢ Xét phương án A. Ta có: $\int_{-2}^{2}\left[f(x)+g(x)\right]\mathrm{d}x = \int_{-2}^{2} f(x)\mathrm{d}x + \int_{-2}^{2} g(x)\mathrm{d}x = (-1)+3 = 2$.

Suy ra phương án A sai.

➢ Xét phương án B. Ta có: $\int_{-2}^{2}\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x = \int_{-2}^{2} f(x)\mathrm{d}x - \int_{-2}^{2} g(x)\mathrm{d}x = (-1)-3 = -4$.

Suy ra phương án B sai.

➢ Xét phương án C. Ta có: $\int_{-2}^{2} 5f(x)\mathrm{d}x = 5\int_{-2}^{2} f(x)\mathrm{d}x = 5.(-1) = -5$.

Suy ra phương án C sai.

➢ Xét phương án D. Ta có: $\int_{-2}^{2}\left[3f(x)-4g(x)\right]\mathrm{d}x = 3\int_{-2}^{2} f(x)\mathrm{d}x - 4\int_{-2}^{2} g(x)\mathrm{d}x$

$=3.(-1)-4.3=-15$. Suy ra phương án D đúng.

» **Câu 9.** Tính $I = \int_{-1}^{0} (2x+3)^2\,\mathrm{d}x$.

A. $I = \frac{13}{3}$.
B. $I = \frac{14}{3}$.
C. $I = -\frac{13}{3}$.
D. $I = \frac{26}{3}$.

Lời giải

Chọn A

$$I = \int_{-1}^{0} (2x+3)^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\frac{(2x+3)^3}{3}\right]\Bigg|_{-1}^{0} = \frac{1}{6}\left[(0+3)^3 - (-2+3)^3\right] = \frac{13}{3}.$$

» **Câu 10.** Tích phân $\int_0^1 \left(e^{3x}+5x^4\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. $e^3 + \frac{3}{2}$.
B. e.
C. $\frac{e^3+2}{3}$.
D. e^3.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\int_0^1 \left(e^{3x}+5x^4\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{1}{3}e^{3x}+x^5\right)\Big|_0^1=\left(\frac{1}{3}e^3+1\right)-\frac{1}{3}=\frac{e^3+2}{3}$.

» Câu 11. Biết $F(x)=x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Giá trị của $\int_1^2 \left[2+f(x)\right]\mathrm{d}x$ bằng

A. 3. **B.** 5. **C.** $\frac{13}{3}$. **D.** $\frac{7}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\int_1^2 \left[2+f(x)\right]\mathrm{d}x=\left(2x+x^2\right)\Big|_1^2=8-3=5$

» Câu 12. Cho $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=-1$; $\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x=5$. Tính $\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x$

A. 3. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x$

$\Rightarrow \int_1^3 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x-\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=5-(-1)=6$

Vậy $\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x=6$

» Câu 13. Cho $\int_0^m \left(3x^2-2x+1\right)\mathrm{d}x=6$. Giá trị của tham số m thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(-1;2)$. **B.** $(-\infty;0)$. **C.** $(0;4)$. **D.** $(-3;1)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\int_0^m \left(3x^2-2x+1\right)\mathrm{d}x=\left(x^3-x^2+x\right)\Big|_0^m=m^3-m^2+m$

$\int_0^m \left(3x^2-2x+1\right)\mathrm{d}x=6 \Leftrightarrow m^3-m^2+m-6=0 \Leftrightarrow m=2\in(0;4)$

Vậy $m=2\in(0;4)$.

» Câu 14. Cho $I=\int_0^1 \left(4x-2m^2\right)\mathrm{d}x$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để $I+6>0$?

A. 1. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Do $I=\int_0^1 \left(4x-2m^2\right)\mathrm{d}x=\left(2x^2-2m^2x\right)\Big|_0^1=-2m^2+2$

Khi đó $I+6>0 \Leftrightarrow -2m^2+2+6>0 \Leftrightarrow -m^2+4>0 \Leftrightarrow -2<m<2$

Mà m là số nguyên nên $m\in\{-1;0;1\}$. Vậy có 3 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu.

» Câu 15. Cho a là số thực dương, tính tích phân $I=\int_{-1}^{a}|x|\mathrm{d}x$ theo a.

A. $I=\dfrac{a^2+1}{2}$. **B.** $I=\dfrac{a^2+2}{2}$. **C.** $I=\dfrac{-2a^2+1}{2}$. **D.** $I=\dfrac{|3a^2-1|}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Vì $a>0$ nên $I=-\int_{-1}^{0}x\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{a}x\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}+\dfrac{a^2}{2}=\dfrac{1+a^2}{2}$.

» Câu 16. Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_{0}^{1}f(x)\mathrm{d}x=4$; $\int_{0}^{3}f(x)\mathrm{d}x=6$. Tính $I=\int_{-1}^{3}f(|u|)\mathrm{d}u$

A. 2. **B.** 5. **C.** 10. **D.** 12.

Lời giải

Chọn C

$I=\int_{-1}^{3}f(|u|)\mathrm{d}u=\int_{-1}^{0}f(|u|)\mathrm{d}u+\int_{0}^{3}f(|u|)\mathrm{d}u=\int_{-1}^{0}f(-u)\mathrm{d}u+\int_{0}^{3}f(u)\mathrm{d}u$.

Tính $I_1=\int_{-1}^{0}f(-u)\mathrm{d}u$

Xét $\int_{0}^{1}f(x)\mathrm{d}x=4$. Đặt $x=-u\Rightarrow \mathrm{d}x=-\mathrm{d}u$.

Khi $x=0$ thì $u=0$. Khi $x=1$ thì $u=-1$.

Nên $4=\int_{0}^{1}f(x)\mathrm{d}x=-\int_{0}^{-1}f(-u)\mathrm{d}u=\int_{-1}^{0}f(-u)\mathrm{d}u$.

Tính $I_2=\int_{0}^{3}f(u)\mathrm{d}u$

Ta có $\int_{0}^{3}f(x)\mathrm{d}x=6\Rightarrow\int_{0}^{3}f(u)\mathrm{d}u=6$.

Nên $I=\int_{-1}^{0}f(-u)\mathrm{d}u+\int_{0}^{3}f(u)\mathrm{d}u=4+6=10$.

» Câu 17. Cho $f(x)=\begin{cases}1 & khi\ x\geq 1\\ 2x-1 & khi\ x<1\end{cases}$. Tính $J=\int_{-1}^{2}f(x)\mathrm{d}x$

A. -1 **B.** $\dfrac{1}{2}$ **C.** 4 **D.** 5

Lời giải

Chọn A

$J=\int_{-1}^{2}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x+\int_{1}^{2}f(x)\mathrm{d}x$

Tính $J_1=\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}(2x-1)\mathrm{d}x=\left.(x^2-x)\right|_{-1}^{1}=0-2=-2$

Tính $J_2=\int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_1^2 1\,\mathrm{d}x=2-1=1$

Vậy $J=1-2=-1$.

» Câu 18. Vận tốc của một vật chuyển động là $v(t)=3t^2+5\ (\mathrm{m/s})$. Quãng đường vật đó đi được từ giây thứ 4 đến giây thứ 10 là

A. 669 m. **B.** 696 m. **C.** 699 m. **D.** 966 m.

Lời giải

Chọn D

Quãng đường vật đó đi được từ giây thứ 4 đến giây thứ 10 là $S=\int\limits_4^{10}(3t^2+5)\mathrm{d}t=966$ m.

» Câu 19. Giả sử lợi nhuận biên (tính bằng triệu đồng) của một sản phẩm được mô hình hóa bằng công thức $P'(x)=-0,0004x+9,3$. Ở đây $P(x)$ là lợi nhuận (tính bằng triệu đồng) khi bán được x đơn vị sản phẩm. Khi đó sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 100 lên 125 đơn vị sản phẩm là

A. $232,325$ triệu đồng. **B.** $230,315$ triệu đồng.

C. $321,385$ triệu đồng **D.** $231,375$ triệu đồng.

Lời giải

Chọn D

Ta có sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 100 lên 125 đơn vị sản phẩm là

$$P(125)-P(100)=\int\limits_{100}^{125}P'(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{100}^{125}(-0,0004x+9,3)\mathrm{d}x=-\int\limits_{100}^{125}0,0004x\mathrm{d}x+\int\limits_{100}^{125}9,3\mathrm{d}x$$

$$=-0,0002x^2\Big|_{100}^{125}+9,3x\Big|_{100}^{125}=-0,0002(125^2-100^2)+9,3(125-100)=231,375 \text{ (triệu đồng)}.$$

» Câu 20. Giả sử vận tốc v của dòng máu ở khoảng cách r từ tâm của động mạch bán kính $R=9$, có thể được mô hình hóa bởi công thức $v=k(R^2-r^2)$, trong đó k là một hằng số. Tìm vận tốc trung bình (đối với r) của động mạch trong khoảng $0\le r\le R$.

A. $54k$. **B.** $45k$. **C.** $9k$. **D.** $27k$.

Lời giải

Chọn A

Vận tốc trung bình của động mạch là:

$$v_{tb}=\frac{1}{R-0}\int\limits_0^R v(r)\mathrm{d}r=\frac{1}{R}\int\limits_0^R k(R^2-r^2)\mathrm{d}r=\frac{1}{R}\int\limits_0^R(kR^2-kr^2)\mathrm{d}r=\frac{1}{R}\left(kR^2r-\frac{1}{3}kr^3\right)\Big|_0^R$$

$$=\frac{1}{R}\left(kR^3-\frac{1}{3}kR^3\right)=\frac{2kR^2}{3}=\frac{2k.9^2}{3}=54k.$$

» Câu 21. Cho số thực a và hàm số $f(x)=\begin{cases}2x & khi\ x\le 0\\ a(x-x^2) & khi\ x>0\end{cases}$. Tính tích phân $\int\limits_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x$.

A. $\frac{a}{6}-1$. **B.** $\frac{2a}{3}+1$. **C.** $\frac{a}{6}+1$. **D.** $\frac{2a}{3}-1$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(a\left(x-x^2\right)\right) = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}(2x) = 0 \end{cases}$, và $f(0)=0$. Nên hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Do đó $\int\limits_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x$

$= \int\limits_{-1}^{0} 2x\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{1} a\left(x-x^2\right)\mathrm{d}x$

$= \left(x^2\right)\Big|_{-1}^{0} + a\left(\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = -1 + a\left(\dfrac{1}{6}\right) = \dfrac{a}{6} - 1.$

» Câu 22. Một chiếc xe ô tô đang chạy trên đường cao tốc với vận tốc $72km/h$ thì tài xế bất ngờ đạp phanh làm cho chiếc ô tô chuyển động chậm với gia tốc $a(t) = -\dfrac{8}{5}t\ \left(m/s^2\right)$, trong đó t là thời gian tính bằng giây. Hỏi kể từ khi đạp phanh đến khi ô tô dừng hẳn thì ô tô di chuyển bao nhiêu mét (m)? (*Giả sử trên đường ô tô di chuyển không có gì bất thường*).

A. $50\ (m)$. **B.** $\dfrac{250}{3}\ (m)$. **C.** $\dfrac{200}{3}\ (m)$. **D.** $\dfrac{100}{3}\ (m)$.

Lời giải

Chọn C

Vận tốc của ô tô là $v(t) = \int a(t)\mathrm{d}t = \int\left(-\dfrac{8}{5}t\right)\mathrm{d}t = -\dfrac{4}{5}t^2 + C$.

Ta có $72km/h = 20m/s$.

Vì $v(0) = 20$ nên $C = 20 \Rightarrow v(t) = -\dfrac{4}{5}t^2 + 20$.

Khi xe dừng hẳn thì vận tốc bằng 0 nên $-\dfrac{4}{5}t^2 + 20 = 0 \Rightarrow t = 5$.

Quãng đường cần tìm là $s = \int\limits_0^5\left(-\dfrac{4}{5}t^2 + 20\right)\mathrm{d}t = \left(-\dfrac{4}{15}t^3 + 20t\right)\Big|_0^5 = \dfrac{200}{3}\ (m)$.

B. Câu hỏi – Trả lời Đúng/sai

» Câu 23. Cho $\int\limits_{-3}^{0} f(x)\mathrm{d}x = -4$ và $\int\limits_{-3}^{0} g(x)\mathrm{d}x = -3$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$\int\limits_{-3}^{0}\left[f(x)+g(x)\right]\mathrm{d}x = -7$		
(b)	$\int\limits_{-3}^{0}\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x = 1$		
(c)	$\int\limits_{-3}^{0} -3f(x)\mathrm{d}x = 12$		
(d)	$\int\limits_{-3}^{0}\left[2f(x)+3g(x)\right]\mathrm{d}x = -51$		

Lời giải

(a) $\int_{-3}^{0}\left[f(x)+g(x)\right]dx=-7$.

Ta có: $\int_{-3}^{0}\left[f(x)+g(x)\right]dx=\int_{-3}^{0}f(x)dx+\int_{-3}^{0}g(x)dx=(-4)+(-3)=-7$.

» Chọn ĐÚNG.

(b) $\int_{-3}^{0}\left[f(x)-g(x)\right]dx=1$.

Ta có: $\int_{-3}^{0}\left[f(x)-g(x)\right]dx=\int_{-3}^{0}f(x)dx-\int_{-3}^{0}g(x)dx=(-4)-(-3)=-1$.

» Chọn SAI.

(c) $\int_{-3}^{0}-3f(x)dx=12$.

Ta có: $\int_{-3}^{0}(-3)f(x)dx=(-3).\int_{-3}^{0}f(x)dx=(-3).(-4)=12$.

» Chọn ĐÚNG.

(d) $\int_{-3}^{0}\left[2f(x)+3g(x)\right]dx=-51$.

Sai.

Ta có: $\int_{-3}^{0}\left[2f(x)+3g(x)\right]dx=2\int_{-3}^{0}f(x)dx+3\int_{-3}^{0}g(x)dx=2.(-4)+3.(-3)=-17$.

» Chọn SAI.

» Câu 24. Tính $I=\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}(3-\sin x)dx=a\pi-\frac{b}{c}$ (trong đó $a,b,c\in\mathbb{N}^*$ và $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản). Trong các khẳng định dưới đây, khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$a^3+b^3-c=0$		
(b)	$a^2+b^2>c^2$		
(c)	$3a=2b+c$		
(d)	$c=a+b$		

Lời giải

(a) $a^3+b^3-c=0$.

$$I=\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}(3-\sin x)dx=(3x+\cos x)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{3}}=\left[\left(\pi+\cos\frac{\pi}{3}\right)-(0+\cos 0)\right]=\pi-\frac{1}{2}.$$

Suy ra $\begin{cases}a=1\\b=1\\c=2\end{cases}$. Vậy $a^3+b^3-c=1+1-2=0$.

» Chọn ĐÚNG.

(b) $a^2+b^2>c^2$.

Với $\begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c=2 \end{cases}$, xét $a^2+b^2>c^2$ ta có $1+1>4$ là mệnh đề sai.

» **Chọn** SAI.

(c) $3a=2b+c$.

Với $\begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c=2 \end{cases}$, xét $3a=2b+c$ ta có $3=2+2$ là mệnh đề sai.

» **Chọn** SAI.

(d) $c=a+b$.

Với $\begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c=2 \end{cases}$, xét $c=a+b$ ta có $2=1+1$ là mệnh đề đúng.

» **Chọn** ĐÚNG.

» Câu 25. Cho hàm số $f(x)$ liên tục và không âm trên đoạn $[0;3]$. $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên đoạn $[0;3]$ thỏa $F(3)=2$ và $F(0)=1$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Hiệu số $F(3)-F(0)$ gọi là tích phân từ 3 đến 0 của hàm số $f(x)$.		
(b)	$\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x=-\int_3^0 f(x)\mathrm{d}x=F(3)-F(0)$		
(c)	$\int_0^3 f(t)\mathrm{dt}=1$		
(d)	Hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=0,x=3$ có diện tích bằng 1.		

Lời giải

(a) Hiệu số $F(3)-F(0)$ gọi là tích phân từ 3 đến 0 của hàm số $f(x)$.

Hiệu số $F(3)-F(0)$ gọi là tích phân từ 0 đến 3 của hàm số $f(x)$.

$$\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x=F(3)-F(0)$$

» **Chọn** SAI.

(b) $\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x=-\int_3^0 f(x)\mathrm{d}x=F(3)-F(0)$.

$$\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x=-\int_3^0 f(x)\mathrm{d}x=F(3)-F(0).$$

» **Chọn** ĐÚNG.

(c) $\int_0^3 f(t)\mathrm{dt}=1$.

Ta có $\int\limits_0^3 f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_0^3 f(t)\mathrm{d}t$. Mà $\int\limits_0^3 f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_0^3 = F(3) - F(0) = 2 - 1 = 1$.

Suy ra $\int\limits_0^3 f(t)\mathrm{d}t = 1$.

» Chọn ĐÚNG.

(d) Hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0, x = 3$ có diện tích bằng 1.

Ta có hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0, x = 3$ có diện tích $S = \int\limits_0^3 f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_0^3 = F(3) - F(0) = 2 - 1 = 1$.

» Chọn ĐÚNG.

» Câu 26. Cho hàm số $f(x) = 6x^5$. Gọi $I = \int\limits_a^b 6x^5\mathrm{d}x$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Gọi $J = \int\limits_a^b x^5\mathrm{d}x$ thì ta có $J = 6I$.		
(b)	Biết $\int\limits_a^b (6x^5 + x)\mathrm{d}x = 8$ và $\int\limits_a^b x\mathrm{d}x = 3$ thì $I = \int\limits_a^b 6x^5\mathrm{d}x = 5$.		
(c)	Với $c \in [a;b]$, thì $\int\limits_a^b 6x^5\mathrm{d}x = \int\limits_a^c 6x^5\mathrm{d}x + \int\limits_c^b 6x^5\mathrm{d}x$		
(d)	$\int\limits_{-1}^1 \left|6x^5\right|\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^0 6x^5\mathrm{d}x + \int\limits_0^1 6x^5\mathrm{d}x$		

Lời giải

(a) Gọi $J = \int\limits_a^b x^5\mathrm{d}x$ thì ta có $J = 6I$.

Ta có $I = \int\limits_a^b 6x^5\mathrm{d}x = 6\int\limits_a^b x^5\mathrm{d}x = 6J$.

» Chọn SAI.

(b) Biết $\int\limits_a^b (6x^5 + x)\mathrm{d}x = 8$ và $\int\limits_a^b x\mathrm{d}x = 3$ thì $I = \int\limits_a^b 6x^5\mathrm{d}x = 5$.

Ta có $\int\limits_a^b (6x^5 + x)\mathrm{d}x = \int\limits_a^b 6x^5\mathrm{d}x + \int\limits_a^b x\mathrm{d}x = 8$.

Suy ra $\int\limits_a^b 6x^5\mathrm{d}x = 8 - \int\limits_a^b x\mathrm{d}x = 8 - 3 = 5$.

» Chọn ĐÚNG.

(c) Với $c \in [a;b]$, thì $\int\limits_a^b 6x^5\mathrm{d}x = \int\limits_a^c 6x^5\mathrm{d}x + \int\limits_c^b 6x^5\mathrm{d}x$.

Với $c\in[a;b]$, thì $\int_a^b 6x^5\mathrm{d}x=\int_a^c 6x^5\mathrm{d}x+\int_c^b 6x^5\mathrm{d}x$.

» **Chọn** ĐÚNG.

(d) $\int_{-1}^1\left|6x^5\right|\mathrm{d}x=\int_{-1}^0 6x^5\mathrm{d}x+\int_0^1 6x^5\mathrm{d}x$.

Ta có $\int_{-1}^1\left|6x^5\right|\mathrm{d}x=\int_{-1}^0\left|6x^5\right|\mathrm{d}x+\int_0^1\left|6x^5\right|\mathrm{d}x=-\int_{-1}^0 6x^5\mathrm{d}x+\int_0^1 6x^5\mathrm{d}x$.

» **Chọn** SAI.

» **Câu 27.** Cho $I=\int_0^3\left|x^2-2x\right|\mathrm{d}x$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Ta có $\left\|x^2-2x\right\|=\begin{cases}x^2-2x, & 0\le x\le 2\\ x^2-2x, & 2<x\le 3\end{cases}$		
(b)	$I=\int_0^3\left\|x^2-2x\right\|\mathrm{d}x=\int_0^2\left\|x^2-2x\right\|\mathrm{d}x+\int_2^3\left\|x^2-2x\right\|\mathrm{d}x$		
(c)	$I=\int_0^3\left\|x^2-2x\right\|\mathrm{d}x=\int_0^2\left(x^2-2x\right)\mathrm{d}x+\int_2^3\left(x^2-2x\right)\mathrm{d}x$		
(d)	$I=\left.\left(-\frac{x^3}{3}+x^2\right)\right\|_0^2+\left.\left(\frac{x^3}{3}-x^2\right)\right\|_2^3$		

Lời giải

(a) Ta có $\left|x^2-2x\right|=\begin{cases}x^2-2x, & 0\le x\le 2\\ x^2-2x, & 2<x\le 3\end{cases}$.

Ta có $\left|x^2-2x\right|=\begin{cases}-\left(x^2-2x\right), & 0\le x\le 2\\ x^2-2x, & 2<x\le 3\end{cases}$.

» **Chọn** SAI.

(b) $I=\int_0^3\left|x^2-2x\right|\mathrm{d}x=\int_0^2\left|x^2-2x\right|\mathrm{d}x+\int_2^3\left|x^2-2x\right|\mathrm{d}x$.

» **Chọn** ĐÚNG.

(c) $I=\int_0^3\left|x^2-2x\right|\mathrm{d}x=\int_0^2\left(x^2-2x\right)\mathrm{d}x+\int_2^3\left(x^2-2x\right)\mathrm{d}x$.

$$I=\int_0^3\left|x^2-2x\right|\mathrm{d}x=\int_0^2\left|x^2-2x\right|\mathrm{d}x+\int_2^3\left|x^2-2x\right|\mathrm{d}x=-\int_0^2\left(x^2-2x\right)\mathrm{d}x+\int_2^3\left(x^2-2x\right)\mathrm{d}x.$$

» **Chọn** SAI.

(d) $I=\left.\left(-\frac{x^3}{3}+x^2\right)\right|_0^2+\left.\left(\frac{x^3}{3}-x^2\right)\right|_2^3$.

$$I=\int_0^3\left|x^2-2x\right|\mathrm{d}x=\int_0^2\left|x^2-2x\right|\mathrm{d}x+\int_2^3\left|x^2-2x\right|\mathrm{d}x=-\int_0^2\left(x^2-2x\right)\mathrm{d}x+\int_2^3\left(x^2-2x\right)\mathrm{d}x.$$

$$\Rightarrow I=-\left(\frac{x^3}{3}-x^2\right)\Bigg|_0^2+\left(\frac{x^3}{3}-x^2\right)\Bigg|_2^3=\left(-\frac{x^3}{3}+x^2\right)\Bigg|_0^2+\left(\frac{x^3}{3}-x^2\right)\Bigg|_2^3.$$

» **Chọn** ĐÚNG.

» **Câu 28.** Cho tích phân $I=\int\limits_{-2}^{1}\left|4x-1\right|\mathrm{d}x$. Trong các khẳng định sau đây, khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Tích phân $I=\int\limits_{-2}^{\frac{1}{4}}\left(4x-1\right)\mathrm{d}x+\int\limits_{\frac{1}{4}}^{1}\left(4x-1\right)\mathrm{d}x$.		
(b)	Giá trị của tích phân $I=\frac{45}{4}$		
(c)	Tích phân $I=\left|\int\limits_{-2}^{1}\left(4x-1\right)\mathrm{d}x\right|$		
(d)	Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị: $y=4x-1; y=0; x=-2; x=1$. Khi đó $S=\left|I\right|$		

Lời giải

(a) *Tích phân* $I=\int\limits_{-2}^{\frac{1}{4}}\left(4x-1\right)\mathrm{d}x+\int\limits_{\frac{1}{4}}^{1}\left(4x-1\right)\mathrm{d}x$.

Ta có: $I=\int\limits_{-2}^{1}\left|4x-1\right|\mathrm{d}x=\int\limits_{-2}^{\frac{1}{4}}\left|4x-1\right|\mathrm{d}x+\int\limits_{\frac{1}{4}}^{1}\left|4x-1\right|\mathrm{d}x=\int\limits_{-2}^{\frac{1}{4}}\left(1-4x\right)\mathrm{d}x+\int\limits_{\frac{1}{4}}^{1}\left(4x-1\right)\mathrm{d}x$.

» **Chọn** SAI.

(b) *Giá trị của tích phân* $I=\frac{45}{4}$.

Ta có: $I=\int\limits_{-2}^{1}\left|4x-1\right|\mathrm{d}x=\int\limits_{-2}^{\frac{1}{4}}\left(1-4x\right)\mathrm{d}x+\int\limits_{\frac{1}{4}}^{1}\left(4x-1\right)\mathrm{d}x=\left(x-2x^2\right)\Big|_{-2}^{\frac{1}{4}}+\left(2x^2-x\right)\Big|_{\frac{1}{4}}^{1}=\frac{45}{4}$.

» **Chọn** ĐÚNG.

(c) *Tích phân* $I=\left|\int\limits_{-2}^{1}\left(4x-1\right)\mathrm{d}x\right|$.

Ta có: $I=\int\limits_{-2}^{1}\left|4x-1\right|\mathrm{d}x=\int\limits_{-2}^{\frac{1}{4}}\left(1-4x\right)\mathrm{d}x+\int\limits_{\frac{1}{4}}^{1}\left(4x-1\right)\mathrm{d}x=\left(x-2x^2\right)\Big|_{-2}^{\frac{1}{4}}+\left(2x^2-x\right)\Big|_{\frac{1}{4}}^{1}=\frac{45}{4}$.

Mà $\left|\int\limits_{-2}^{1}\left(4x-1\right)\mathrm{d}x\right|=\left|\left(2x^2-x\right)\Big|_{-2}^{1}\right|=\left|-9\right|=9\neq I$

» **Chọn** SAI.

(d) Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị: $y=4x-1; y=0; x=-2; x=1$. Khi đó $S=|I|$.

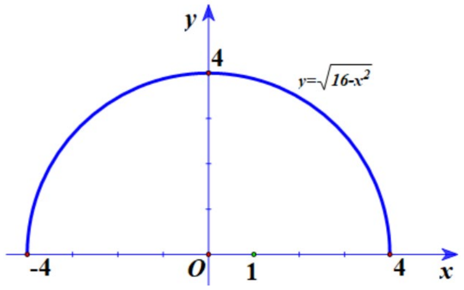
Ta có S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị: $y=4x-1; y=0; x=-2; x=1$ là $S=\int_{-2}^{1}|4x-1|\,dx=I$.

Mà $I=\int_{-2}^{1}|4x-1|\,dx=\int_{-2}^{\frac{1}{4}}(1-4x)\,dx+\int_{\frac{1}{4}}^{1}(4x-1)\,dx=\left(x-2x^2\right)\Big|_{-2}^{\frac{1}{4}}+\left(2x^2-x\right)\Big|_{\frac{1}{4}}^{1}=\frac{45}{4}\Rightarrow |I|=I$.

Do đó $S=I=|I|$.

» Chọn ĐÚNG.

» Câu 29. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đồ thị hàm số $y=\sqrt{16-x^2}$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?



	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$4\int_0^4\sqrt{16-x^2}\,dx$ bằng diện tích hình tròn có bán kính bằng 4.		
(b)	$\int_{-4}^{0}\sqrt{16-x^2}\,dx=-\int_0^4\sqrt{16-x^2}\,dx$		
(c)	$\int_{-4}^{4}\sqrt{16-x^2}\,dx=4\int_0^4\sqrt{16-x^2}\,dx$		
(d)	$\int_{-4}^{4}\sqrt{16-x^2}\,dx=8\pi$		

Lời giải

(a) $4\int_0^4\sqrt{16-x^2}\,dx$ bằng diện tích hình tròn có bán kính bằng 4.

$\int_0^4\sqrt{16-x^2}\,dx$ bằng diện tích hình giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\sqrt{16-x^2}$, trục Ox và hai đường thẳng $x=0, x=4$.

Gọi S là diện tích hình tròn có bán kính bằng 4, khi đó ta có:

$\int_0^4\sqrt{16-x^2}\,dx=\frac{S}{4}\Leftrightarrow 4\int_0^4\sqrt{16-x^2}\,dx=S$.

» Chọn ĐÚNG.

(b) $\int_{-4}^{0}\sqrt{16-x^2}\,dx=-\int_0^4\sqrt{16-x^2}\,dx$

Ta có: diện tích hình giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\sqrt{16-x^2}$, trục Ox và hai đường thẳng $x=-4, x=0$ bằng với diện tích hình giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\sqrt{16-x^2}$, trục Ox và hai đường thẳng $x=0, x=4$. Do đó $\int_{-4}^{0}\sqrt{16-x^2}\,dx=\int_{0}^{4}\sqrt{16-x^2}\,dx$.

» Chọn SAI.

(c) $\int_{-4}^{4}\sqrt{16-x^2}\,dx=4\int_{0}^{4}\sqrt{16-x^2}\,dx$

Ta có: diện tích hình giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\sqrt{16-x^2}$, trục Ox và hai đường thẳng $x=-4, x=0$ bằng với diện tích hình giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\sqrt{16-x^2}$, trục Ox và hai đường thẳng $x=0, x=4$. Do đó $\int_{-4}^{0}\sqrt{16-x^2}\,dx=\int_{0}^{4}\sqrt{16-x^2}\,dx$

Vậy $\int_{-4}^{4}\sqrt{16-x^2}\,dx=\int_{-4}^{0}\sqrt{16-x^2}\,dx+\int_{0}^{4}\sqrt{16-x^2}\,dx=2\int_{0}^{4}\sqrt{16-x^2}\,dx$.

» Chọn SAI.

(d) $\int_{-4}^{4}\sqrt{16-x^2}\,dx=8\pi$.

$\int_{-4}^{4}\sqrt{16-x^2}\,dx$ bằng nửa diện tích hình tròn có bán kính $R=4$ giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\sqrt{16-x^2}$ và trục Ox.

Vậy $\int_{-4}^{4}\sqrt{16-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\pi.4^2=8\pi$.

» Chọn ĐÚNG.

» Câu 30. Một chất điểm chuyển động trên đường thẳng nằm ngang (chiều dương hướng sang phải) với gia tốc phụ thuộc vào thời gian $t(\text{s})$ là $a(t)=2t-7\ (\text{m/s}^2)$. Biết vận tốc đầu bằng $6\ (\text{m/s})$, xét tính đúng sai của các khẳng định sau.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t(\text{s})$ xác định bởi $v(t)=t^2-7t+10$.		
(b)	Tại thời điểm $t=7$ (s), vận tốc của chất điểm là 6 (m/s).		
(c)	Độ dịch chuyển của vật trong khoảng thời gian $1\le t\le 7$ là 18 m.		
(d)	Trong 8 giây đầu tiên, thời điểm chất điểm xa nhất về phía bên phải là $t=7$ (s).		

Lời giải

(a) Vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t(\text{s})$ xác định bởi $v(t)=t^2-7t+10$.

Ta có $v(t)=\int a(t)\,dt=\int(2t-7)\,dt=t^2-7t+C$.

$v(0)=6\Rightarrow C=6$.

Vậy $v(t)=t^2-7t+6$ (m/s).

» **Chọn** SAI.

(b) *Tại thời điểm $t=7$ (s), vận tốc của chất điểm là 6 (m/s).*

$v(7)=7^2-7\cdot 7+6=6$ (m/s).

» **Chọn** ĐÚNG.

(c) *Độ dịch chuyển của vật trong khoảng thời gian $1\le t\le 7$ là 18 m.*

Độ dịch chuyển của vật trong khoảng thời gian $1\le t\le 7$ là

$$S=\int_1^7 v(t)\mathrm{d}t=\int_1^7\left(t^2-7t+6\right)\mathrm{d}t=\left.\left(\frac{t^3}{3}-\frac{7t^2}{2}+6t\right)\right|_1^7=-18.$$

» **Chọn** SAI.

(d) *Trong 8 giây đầu tiên, thời điểm chất điểm xa nhất về phía bên phải là $t=7$ (s).*

Tọa độ của chất điểm tại thời điểm t là $x(t)=\int v(t)\mathrm{d}t=\int\left(t^2-7t+6\right)\mathrm{d}t=\frac{t^3}{3}-\frac{7t^2}{2}+6t+C$

Ta cần tìm giá trị lớn nhất của $x(t)$ với $t\in[0;8]$.

Ta có $x'(t)=v(t)=0$ khi $t=1$ hoặc $t=6$.

Lại có $x(0)=C$, $x(1)=\frac{17}{6}+C$, $x(6)=-18+C$, $x(8)=-\frac{16}{3}+C$.

Vậy giá trị lớn nhất của $x(t)$ với $t\in[0;8]$ đạt được khi $t=1$.

» **Chọn** SAI.

» Câu 31. Giả sử lợi nhuận biên (tính bằng triệu đồng) của một sản phẩm được mô hình hóa bằng công thức $P'(x)=-0,0008x+10,4$. Ở đây $P(x)$ là lợi nhuận (tính bằng triệu đồng) khi bán được x đơn vị sản phẩm.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Lợi nhuận khi bán được x đơn vị sản phẩm được tính bằng công thức $P(x)=-0,0008x^2+10,4x$.		
(b)	Lợi nhuận khi bán được 50 sản phẩm đầu tiên là 519 triệu đồng.		
(c)	Sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 50 lên 55 đơn vị sản phẩm là 49,79 triệu đồng.		
(d)	Biết sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 50 lên a đơn vị sản phẩm lớn hơn 517 triệu đồng, khi đó giá trị nhỏ nhất của a là 100.		

Lời giải

(a) *Lợi nhuận khi bán được x đơn vị sản phẩm được tính bằng công thức $P(x)=-0,0008x^2+10,4x$.*

Ta có: $P(x)=\int P'(x)\mathrm{d}x=\int(-0,0008x+10,4)\mathrm{d}x=-0,0004x^2+10,4x$.

» **Chọn** SAI.

(b) *Lợi nhuận khi bán được 50 sản phẩm đầu tiên là 519 triệu đồng.*

Lợi nhuận khi bán được 50 sản phẩm đầu tiên là: $P(50)=-0,0004.50^2+10,4.50=519$ (triệu đồng).

» **Chọn** ĐÚNG.

(c) *Sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 50 lên 55 đơn vị sản phẩm là 49,79 triệu đồng.*

Ta có sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 50 lên 55 đơn vị sản phẩm là

$$P(55)-P(50)=\int_{50}^{55}P'(x)\mathrm{d}x=\int_{50}^{55}(-0{,}0008x+10{,}4)\mathrm{d}x=-\int_{50}^{55}0{,}0008x\mathrm{d}x+\int_{50}^{55}10{,}4\mathrm{d}x$$

$$=-0{,}0004x^2\Big|_{50}^{55}+10{,}4x\Big|_{50}^{55}=-0{,}0004\left(55^2-50^2\right)+10{,}4(55-50)=51{,}79 \text{ (triệu đồng).}$$

» Chọn SAI.

(d) *Biết sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 50 lên a đơn vị sản phẩm lớn hơn 517 triệu đồng, khi đó giá trị nhỏ nhất của a là 100.*

Ta có sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 50 lên a đơn vị sản phẩm là

$$P(a)-P(50)=\int_{50}^{a}P'(x)\mathrm{d}x=\int_{50}^{a}(-0{,}0008x+10{,}4)\mathrm{d}x=-\int_{50}^{a}0{,}0008x\mathrm{d}x+\int_{50}^{a}10{,}4\mathrm{d}x$$

$$=-0{,}0004x^2\Big|_{50}^{a}+10{,}4x\Big|_{50}^{a}=-0{,}0004\left(a^2-50^2\right)+10{,}4(a-50)=-0{,}0004a^2+10{,}4a-519.$$

Theo bài ra ta có:

$-0{,}0004a^2+10{,}4a-519>517\Leftrightarrow 0{,}0004a^2-10{,}4a+1036<0\Leftrightarrow 100<a<25900$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của a là 101.

» Chọn SAI.

» Câu 32. Ở nhiệt độ $37°C$, một phản ứng hóa học từ chất đầu A, chuyển hóa thành chất sản phẩm B theo phương trình: $A\to B$. Giả sử $y(x)$ là nồng độ chất A (đơn vị mol L^{-1}) tại thời điểm x (giây), $y(x)>0$ với $x\ge 0$, thỏa mãn hệ thức: $y'(x)=-7.10^{-4}y(x)$ với $x\ge 0$. Biết rằng tại $x=0$, nồng độ (đầu) của A là $0{,}05$ mol L^{-1}. Xét hàm số $f(x)=\ln y(x)$ với $x\ge 0$. Khi đó, ta có

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$f'(x)=-7.10^{-4}$		
(b)	$f(x)=-7.10^{-4}x+\ln(0{,}05)$		
(c)	$y(30)-y(15)=-6.10^{-4}$		
(d)	Nồng độ trung bình của chất A từ thời điểm 15 giây đến thời điểm 30 giây gần bằng $0{,}05$.		

Lời giải

(a) $f'(x)=-7.10^{-4}$.

Ta có $f'(x)=\left(\ln y(x)\right)'=\dfrac{y'(x)}{y(x)}=-7.10^{-4}$.

» Chọn ĐÚNG.

(b) $f(x)=-7.10^{-4}x+\ln(0{,}05)$.

Ta có $f(x)=\int f'(x)\mathrm{d}x=\int\left(-7.10^{-4}\right)\mathrm{d}x=-7.10^{-4}x+C$.

Theo giả thiết $y(0)=0{,}05$ nên $f(0)=\ln y(0)=\ln(0{,}05)$. Khi đó $C=\ln(0{,}05)$.

Vậy $f(x)=-7.10^{-4}x+\ln(0{,}05)$.

» Chọn ĐÚNG.

(c) $y(30)-y(15)=-6.10^{-4}$.

Từ $f(x)=\ln y(x)\Rightarrow y(x)=e^{f(x)}=e^{-7.10^{-4}x+\ln(0,05)}=\frac{1}{20}e^{-7.10^{-4}x}$.

Do đó $y(30)-y(15)=\frac{1}{20}\left(e^{-7.10^{-4}.30}-e^{-7.10^{-4}.15}\right)\approx -5,2.10^{-4}$.

» Chọn SAI.

(d) Nồng độ trung bình của chất A từ thời điểm 15 giây đến thời điểm 30 giây gần bằng $0,05$.

Nồng độ trung bình của chất A từ thời điểm 15 giây đến thời điểm 30 giây là:

$$\frac{1}{30-15}\int_{15}^{30}y(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{15}\int_{15}^{30}\left(-\frac{1}{7.10^{-4}}\right)y'(x)\mathrm{d}x=-\frac{10^4}{105}y(x)\Big|_{15}^{30}=-\frac{10^4}{105}\left[y(30)-y(15)\right]\approx 0,05.$$

» Chọn ĐÚNG.

» Câu 33. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}3x^2+2x+m & \text{khi } x\ge 1\\ 5-2x & \text{khi } x<1\end{cases}$ (m là tham số thực) liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết rằng $f(x)$ có nguyên hàm trên $\mathbb{R}$ là $F(x)$ thỏa mãn $F(-2)=-10$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$m=-2$		
(b)	$F(x)=\begin{cases}x^3+x^2-2x+8 & \text{khi } x\ge 1\\ 5x-x^2+4 & \text{khi } x<1\end{cases}$		
(c)	$F(3)=83$		
(d)	$\int_1^{e^2}f(\ln x)\frac{1}{x}\mathrm{d}x=3$		

Lời giải

(a) $m=-2$.

Ta có $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $f(x)$ liên tục tại $x=1$.

Do đó $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=f(1)\Leftrightarrow m+5=3\Leftrightarrow m=-2$.

» Chọn ĐÚNG.

(b) $F(x)=\begin{cases}x^3+x^2-2x+8 & \text{khi } x\ge 1\\ 5x-x^2+4 & \text{khi } x<1\end{cases}$.

Ta có $F(x)=\begin{cases}x^3+x^2+mx+C_1 & \text{khi } x\ge 1\\ 5x-x^2+C_2 & \text{khi } x<1\end{cases}$

$F(-2)=5(-2)-(-2)^2+C_2\Rightarrow C_2=-10+14=4$.

$\lim\limits_{x\to 1^+}F(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(x^3+x^2+mx+C_1\right)=m+2+C_1$.

$\lim\limits_{x\to 1^-}F(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(5x-x^2+C_2\right)=4+C_2$.

Ta lại có $F(x)$ liên tục tại $x=1$.

Do đó $\lim\limits_{x\to 1^-}F(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}F(x)=F(1)\Leftrightarrow m+2+C_1=4+C_2\Leftrightarrow C_1=6-m$.

Mà $m=-2$ nên $C_1=8$.

Vậy $F(x)=\begin{cases} x^3+x^2-2x+8 & \text{khi } x\ge 1 \\ 5x-x^2+4 & \text{khi } x<1 \end{cases}$.

» Chọn ĐÚNG.

(c) $F(3)=83$.

Ta có $F(3)=3^3+3^2-2.3+8=38$.

» Chọn SAI.

(d) $\int_1^{e^2} f(\ln x)\frac{1}{x}\mathrm{d}x=3$.

Đặt $t=\ln x \Rightarrow dt=\frac{1}{x}dx$.

Khi $x=1\Rightarrow t=0$;

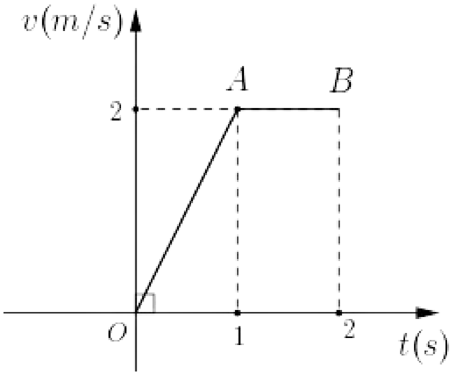
Khi $x=e^2\Rightarrow t=2$.

Do đó

$$\int_1^{e^2} f(\ln x)\frac{1}{x}dx=\int_0^2 f(t)dt=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx=\int_0^1(5-2x)dx+\int_1^2(3x^2+2x-2)dx=12.$$

» Chọn SAI.

» Câu 34. Một vật chuyển động với vận tốc được cho bởi đồ thị trong hình sau:



	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Vận tốc của vật tại thời điểm t được xác định bởi $v(t)=\begin{cases} 2t & \text{khi } 0\le t\le 1 \\ 2 & \text{khi } t>1 \end{cases}$.		
(b)	Quãng đường vật đi được trong 1 giây đầu tiên được xác định bởi công thức $s(t)=\int_0^1 v(t)\mathrm{d}t$		
(c)	Quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian từ 1 giây đến 2 giây được xác định bởi công thức $s(t)=\int_0^2 v(t)\mathrm{d}t$		
(d)	Quãng đường mà vật đi được trong 2 giây đầu tiên là $3m$.		

Lời giải

(a) Vận tốc của vật tại thời điểm t được xác định bởi $v(t)=\begin{cases} 2t & \text{khi } 0\le t\le 1 \\ 2 & \text{khi } t>1 \end{cases}$.

Ta có phương trình đường thẳng đi qua hai điểm OA là $y=2x$, đường thẳng đi qua hai điểm A,B là $y=2$.

Do đó ta có công thức hàm vận tốc là: $v(t)=\begin{cases}2t & \text{khi } 0\le t\le 1\\ 2 & \text{khi } t>1\end{cases}$.

» Chọn ĐÚNG.

Quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian từ a giây đến b giây được xác định bởi công thức $s(t)=\int_a^b v(t)\mathrm{d}t$.

(b) *Quãng đường vật đi được trong 1 giây đầu tiên được xác định bởi công thức* $s(t)=\int_0^1 v(t)\mathrm{d}t$.

Do đó quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian từ 0 giây đến 1 giây được xác định bởi công thức $s(t)=\int_0^1 v(t)\mathrm{d}t$.

» Chọn ĐÚNG.

(c) *Quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian từ 1 giây đến 2 giây được xác định bởi công thức* $s(t)=\int_0^2 v(t)\mathrm{d}t$.

Do đó quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian từ 1 giây đến 2 giây được xác định bởi công thức $s(t)=\int_1^2 v(t)\mathrm{d}t$.

» Chọn SAI.

(d) *Quãng đường mà vật đi được trong 2 giây đầu tiên là* $3m$.

Quãng đường mà vật đi được trong 2 giây đầu tiên là:

$$s(t)=\int_0^2 v(t)\mathrm{d}t=\int_0^1 2t\mathrm{d}t+\int_1^2 2\,\mathrm{d}t=t^2\Big|_0^1+2t\Big|_1^2=1+2=3\,\mathrm{m}.$$

» Chọn ĐÚNG.

C. *Câu hỏi – Trả lời ngắn*

» Câu 35. Nếu $F'(x)=\dfrac{1}{2x}$ và $F(1)=1$ thì giá trị của $F(4)$ bằng bao nhiêu? *Làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ 2.*

Lời giải

✓ Trả lời: 1,69

Ta có: $\int_1^4 F'(x)\mathrm{d}x=\int_1^4\dfrac{1}{2x}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\ln|x|\Big|_1^4=\ln 2$.

Lại có: $\int_1^4 F'(x)\mathrm{d}x=F(x)\Big|_1^4=F(4)-F(1)$.

Suy ra $F(4)-F(1)=\ln 2$.

Do đó $F(4)=F(1)+\ln 2=1+\ln 2$.

» Câu 36. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;2]$. Giả sử $y=F(x)$ là một nguyên hàm của $y=f(x)$ và $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=3$ và $F(0)=2$. Giá trị $F(2)$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

✓ ***Trả lời: 5***

Ta có $\int_0^2 f(x)dx=F(2)-F(0)\Rightarrow F(2)=\int_0^2 f(x)dx+F(0)=3+2=5$.

» Câu 37. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Giả sử $\int_0^5 f(x)\mathrm{d}x=6$ và $\int_2^5 f(x)\mathrm{d}x=8$. Giá trị $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

✓ ***Trả lời: -2***

Ta có $\int_0^5 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x+\int_2^5 f(x)\mathrm{d}x\Rightarrow\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^5 f(x)\mathrm{d}x-\int_2^5 f(x)\mathrm{d}x=6-8=-2$.

» Câu 38. Cho các hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Giả sử $\int_2^7\left[2f(x)+3g(x)\right]\mathrm{d}x=1$ và $\int_2^7\left[f(x)-2g(x)\right]\mathrm{d}x=4$. Khi đó, $\int_2^7 f(x)\mathrm{d}x-3\int_7^2 g(x)\mathrm{d}x$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

✓ ***Trả lời: -1***

Ta có: $\begin{cases}\int_2^7\left[2f(x)+3g(x)\right]\mathrm{d}x=1\\ \int_2^7\left[f(x)-2g(x)\right]\mathrm{d}x=4\end{cases}.\Leftrightarrow\begin{cases}2\int_2^7 f(x)\mathrm{d}x+3\int_2^7 g(x)\mathrm{d}x=1\\ \int_2^7 f(x)\mathrm{d}x-2\int_2^7 g(x)\mathrm{d}x=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\int_2^7 f(x)\mathrm{d}x=2\\ \int_2^7 g(x)\mathrm{d}x=-1\end{cases}$

Mà $\int_2^7 f(x)\mathrm{d}x-3\int_7^2 g(x)\mathrm{d}x=\int_2^7 f(x)\mathrm{d}x+3\int_2^7 g(x)\mathrm{d}x=2+3.(-1)=-1$.

» Câu 39. Biết $F(x)=x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Giá trị của $\int_1^2\left[2+f(x)\right]\mathrm{d}x$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

✓ ***Trả lời: 5***

Ta có $\int_1^2\left[2+f(x)\right]\mathrm{d}x=\left(2x+x^2\right)\Big|_1^2=8-3=5$.

» Câu 40. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}x^2-1 & \text{khi } x\ge 2\\ x^2-2x+3 & \text{khi } x<2\end{cases}$. Tích phân $I=\frac{1}{2}\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x$ bằng bao nhiêu?

Làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ 2

Lời giải

✓ ***Trả lời: 3,83***

$$I=\frac{1}{2}\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left[\int_1^2\left(x^2-2x+3\right)\mathrm{d}x+\int_2^3\left(x^2-1\right)\mathrm{d}x\right]=\frac{23}{6}.$$

» Câu 41. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & khi\ x\ge 1\\ x+1 & khi\ x<1\end{cases}$. Tích phân $I=\int_2^0 -3t^2 f(t)\,\mathrm{d}t$ bằng bao nhiêu? *Làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ 2*

Lời giải

✓ Trả lời: 2,08

$$I=-3\int_2^0 t^2 f(t)\,\mathrm{d}t=3\int_0^2 x^2 f(x)\,\mathrm{d}x=3\left[\int_0^1 x^2(x+1)\,\mathrm{d}x+\int_1^2 x\,\mathrm{d}x\right]=\frac{25}{12}\approx 2{,}08$$

» Câu 42. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}2x^2-1 & \text{khi } x<0\\ x-1 & \text{khi } 0\le x\le 2\\ 5-2x & \text{khi } x>2\end{cases}$. Tính tích phân $I=\int_{-5}^9 \frac{1}{7}f(t)\,\mathrm{d}t$ bằng bao nhiêu?

Làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ 2

Lời giải

✓ Trả lời: 5,19

$$\Rightarrow I=\frac{1}{7}\int_{-5}^9 f(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{7}\int_{-5}^9 f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{7}\int_{-5}^0 f(x)\,\mathrm{d}x+\frac{1}{7}\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x+\frac{1}{7}\int_2^9 f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{7}\int_{-5}^0\left(2x^2-1\right)\mathrm{d}x+\frac{1}{7}\int_0^2(x-1)\,\mathrm{d}x+\frac{1}{7}\int_2^9(5-2x)\,\mathrm{d}x=\frac{109}{21}\approx 5{,}19$$

» Câu 43. Biết $I=\int_1^3\left|\frac{x^2-6x+8}{x+1}\right|\mathrm{d}x=\frac{a}{b}+c\ln\frac{d}{e}$ biết a là số nguyên âm và $b,c,d,e\in\mathbb{Z}^*$; $(a,b)=1$, $(d,e)=1$. Giá trị của $a+b+c+d+e$ bằng:

Lời giải

✓ Trả lời: 25

Ta có $x+1>0,\ \forall x\in[1;3]$, suy ra $\int_1^3\left|\frac{x^2-6x+8}{x+1}\right|\mathrm{d}x=\int_1^3\frac{\left|x^2-6x+8\right|}{x+1}\mathrm{d}x$.

Lại có $x^2-6x+8\le 0\Leftrightarrow 2\le x\le 4$. Do đó

$$I=\int_1^3\frac{\left|x^2-6x+8\right|}{x+1}\mathrm{d}x=\int_1^2\frac{x^2-6x+8}{x+1}\mathrm{d}x-\int_2^3\frac{x^2-6x+8}{x+1}\mathrm{d}x$$

$$=\int_1^2\left(x-7+\frac{15}{x+1}\right)\mathrm{d}x-\int_2^3\left(x-7+\frac{15}{x+1}\right)\mathrm{d}x=\left(-\frac{11}{2}+15\ln\frac{3}{2}\right)-\left(-\frac{9}{2}+15\ln\frac{4}{3}\right)=-\frac{9}{2}+15\ln\frac{9}{8}.$$

Vậy $\begin{cases}a=-9\\ b=2\\ c=15\\ d=9\\ e=8\end{cases}\Rightarrow a+b+c+d+e=25$

» Câu 44. Cho hàm số $y=f(x)=\begin{cases}e^x+1 & \text{khi } x\ge 0\\ x^2-2x+2 & \text{khi } x<0\end{cases}$. Biết giá trị của $I=\int_{1/e}^{e^2}\frac{f(\ln x-1)}{x}\mathrm{d}x=\frac{a}{b}+ce$

với $a,b,c\in\mathbb{Z},b\neq 0$ và $(a,b)=1$ bằng. Giá trị của $a+b+c$

Lời giải

✓ ***Trả lời: 36***

Xét $I=\int\limits_{1/e}^{e^2}\frac{f(\ln x-1)}{x}\mathrm{d}x$.

Đặt $u=\ln x-1\Rightarrow \mathrm{d}u=\frac{1}{x}\mathrm{d}x$. Đổi cận $\begin{cases}x=\frac{1}{e}\Rightarrow u=-2\\ x=e^2\Rightarrow u=1\end{cases}$.

Khi đó $I=\int\limits_{-2}^{1}f(u)\mathrm{d}u=\int\limits_{-2}^{1}f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{-2}^{0}f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{1}f(x)\mathrm{d}x$

$=\int\limits_{-2}^{0}\left(x^2-2x+2\right)\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{1}\left(e^x+1\right)\mathrm{d}x=\left.\left(\frac{1}{3}x^3-x^2+2x\right)\right|_{-2}^{0}+\left.\left(e^x+x\right)\right|_{0}^{1}=\frac{32}{3}+e$.

Vậy $\begin{cases}a=32\\ b=3\\ c=1\end{cases}\Rightarrow a+b+c=36$

» Câu 45. Một vật chuyển động dọc theo một đường thẳng sao cho vận tốc của nó tại thời điểm t (giây) là $v(t)=t^2-t-6$ (mét/giây). Quãng đường (mét) vật đi được trong khoảng thời gian $1\le t\le 4$ bằng (làm tròn tới hàng phần trăm)

Lời giải

✓ ***Trả lời: 10,17***

Gọi S là quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian $1\le t\le 4$.

Ta có $S=\int\limits_{1}^{4}\left|v(t)\right|\mathrm{d}t=\int\limits_{1}^{4}\left|t^2-t-6\right|\mathrm{d}t=\int\limits_{1}^{3}\left|t^2-t-6\right|\mathrm{d}t+\int\limits_{3}^{4}\left|t^2-t-6\right|\mathrm{d}t$

$=\left|-\frac{22}{3}\right|+\left|\frac{17}{6}\right|=\frac{61}{6}\approx 10,17(m)$

Chương 04

Bài 3. ỨNG DỤNG HÌNH HỌC CỦA TÍCH PHÂN

A. Lý thuyết

1. Diện tích hình thang cong

Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số, trục hoành, x=a và x=b

Hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$.

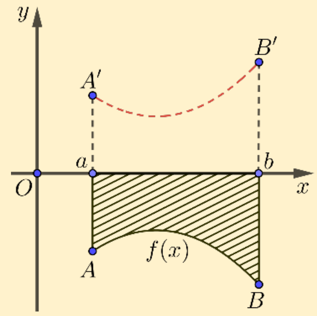
- *Trường hợp* $f(x)>0$ *trên* $[a;b]$,

  Khi đó diện tích hình thang cong giới hạn bởi đồ thị $f(x)$, Ox và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$:
  $$\boxed{S=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}.$$

- *Trường hợp* $f(x)\le 0$ *trên* $[a;b]$, ta có $-f(x)\ge 0$

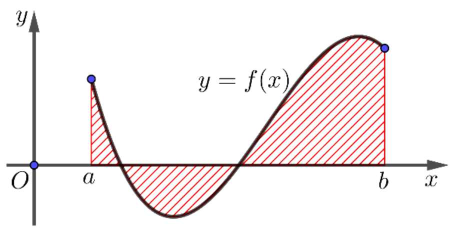
  S hình thang cong $aABb = S$ hình thang cong $aA'B'b$.
  ($aA'B'b$ là hình đối xứng của hình thang đã cho qua trục hoành).

  Do đó: $S=S_{aABb}=S_{aA'B'b}=\boxed{\int_a^b(-f(x))\mathrm{d}x}$



⌘ **Tổng quát:**

Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x)$ liên tục, Ox và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ được tính:
$$\boxed{S=\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x}$$



Chú ý

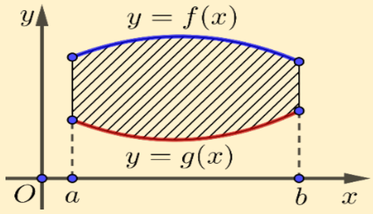
» Giả sử hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[a;b]$. Nếu $f(x)$ không đổi dấu trên $[a;b]$ thì:
$$\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x=\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|$$

Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số, x=a và x=b

Cho hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số đó và đường thẳng $x=a$, $x=b$.

- *Xét trường hợp* $f(x)\geq g(x)\forall x\in[a;b]$

Gọi S là diện tích hình thang cong giới hạn bởi $\begin{cases} Ox \\ x=a \\ x=b \end{cases}$ và $y=f(x); y=g(x)$.



Khi đó diện tích: $\boxed{S=\int_a^b\left|f(x)-g(x)\right|\mathrm{d}x}$.

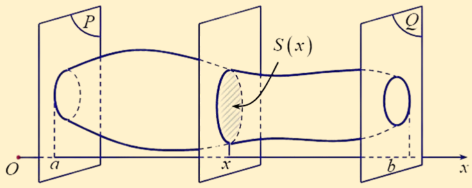
⌘ **Tổng quát:**

Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x)$ và $g(x)$ và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ được tính: $\boxed{S=\int_a^b\left|f(x)-g(x)\right|\mathrm{d}x}$

2. Thể tích hình khối:

Định nghĩa

- Gọi E là phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại các điểm a và b, $S(x)$ là diện tích thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm x, $(a\leq x\leq b)$



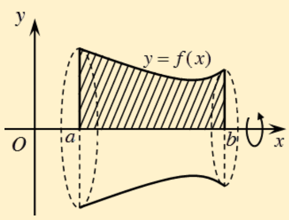
Giả sử $S(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a;b]$

Khi đó, thể tích của vật thể E được xác định: $\boxed{V=\int_a^b S(x)\mathrm{d}x}$.

3. Thể tích khối tròn xoay:

Định nghĩa

- Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi $y=f(x)$, Ox, và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ quanh trục Ox: $\boxed{V=\pi\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x}$



B Các dạng bài tập

Dạng 1. Xây dựng công thức tính diện tích theo hình vẽ

Phương pháp

- *Xác định công thức diện tích hình phẳng:*

» **Bước 1:** Xác định đồ thị của các hàm số được cho trên hình vẽ.

» **Bước 2:** Xác định các vị trí tương giao giữa các đồ thị.

» **Bước 3:** Áp dụng công thức tính diện tích $S=\int_a^b\left|f(x)-g(x)\right|\mathrm{d}x$.

» **Bước 4:** Phá trị tuyệt đối: Lấy công thức hàm số của đồ thị nằm trên trừ công thức hàm số của đồ thị nằm dưới

- *Xác định công thức thể tích khối tròn xoay:*

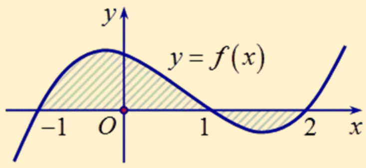
» **Bước 1:** Xác định đồ thị của các hàm số được cho trên hình vẽ.

» **Bước 2:** Xác định các vị trí tương giao giữa các đồ thị.

» **Bước 3:** Áp dụng công thức tính diện tích $V=\pi\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$.

Ví dụ 1.1.

Gọi S là diện tích miền hình phẳng được tô đậm trong hình vẽ bên. Xây dựng công thức tính S?



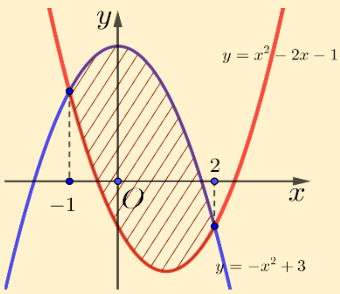
Lời giải

Thấy rằng đồ thị hàm số $y=f(x)$ cắt trục Ox tại ba điểm $x=-1; x=1; x=2$.

Do đó $S=\int_{-1}^{2}\left|f(x)\right|\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}\left[f(x)-0\right]\mathrm{d}x+\int_{1}^{2}\left[0-f(x)\right]\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x-\int_{1}^{2}f(x)\mathrm{d}x$.

Ví dụ 1.2.

Cho đồ thị $y=f(x)$ như hình vẽ bên. Xác định công thức diện tích miền được gạch sọc ở hình bên.



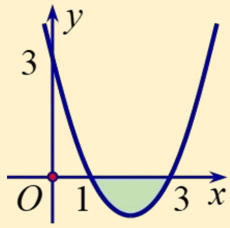
Lời giải

Ta có: $(H):\begin{cases} y=-x^2+3 \\ y=x^2-2x-1 \\ x=-1;x=2 \end{cases}$.

Ta có: $S=\int\limits_{-1}^{2}\left|\left(-x^2+3\right)-\left(x^2-2x-1\right)\right|\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{2}\left(-2x^2+2x+4\right)\mathrm{d}x$ (do trên đoạn $[-1;2]$ phần đồ thị $y=-x^2+3$ nằm trên đồ thị $y=x^2-2x-1$).

Ví dụ 1.3.

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và có đồ thị như hình bên. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số đã cho và trục Ox. Quay hình phẳng D quanh trục Ox ta được khối tròn xoay có thể tích V được xác định theo công thức gì?

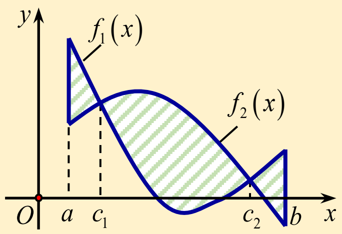


Lời giải

Thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng D quanh trục Ox: $V=\pi\int\limits_{1}^{3}\left[f(x)\right]^2\mathrm{d}x$

Ví dụ 1.4.

Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị của hàm số $f_1(x)$ và $f_2(x)$ liên tục trên $[a;b]$ và đường thẳng $x=a$, $x=b$. Công thức tính diện tích của hình (H) là?



Lời giải

Thấy rằng đồ thị hàm số $y=f_1(x)$ cắt $y=f_2(x)$ tại hai điểm $x=c_1;x=c_2$.

Xét trong $[a;c_1]$: $f_1(x)\ge f_2(x)$;

Xét trong $[c_1;c_2]$: $f_1(x)\le f_2(x)$ và

Xét trong $[c_2;b]$: $f_1(x)\ge f_2(x)$

Vậy $S=\int\limits_{a}^{b}\left|f_1(x)-f_2(x)\right|\mathrm{d}x=\int\limits_{a}^{c_1}\left(f_1(x)-f_2(x)\right)\mathrm{d}x+\int\limits_{c_1}^{c_2}\left(f_2(x)-f_1(x)\right)\mathrm{d}x+\int\limits_{c_2}^{b}\left(f_1(x)-f_2(x)\right)\mathrm{d}x$

Dạng 2. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi y=f(x), Ox và x=a, x=b

Phương pháp

⌘ *Diện tích hình phẳng giới hạn:* $\begin{cases} y=f(x) \\ Ox \\ x=a;x=b \end{cases} \rightarrow S=\int\limits_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$

Để phá bỏ dấu giá trị tuyệt đối ta thường làm như sau:

» Bước 1: Giải $f(x)=0$ tìm nghiệm $x_1,x_2,...,x_n \in (a;b)$ $(a<x_1<x_2<...<x_n<b)$.

» Bước 2: Tính $S=\int\limits_a^{x_1}|f(x)|\mathrm{d}x+\int\limits_{x_1}^{x_2}|f(x)|\mathrm{d}x+...+\int\limits_{x_n}^{b}|f(x)|\mathrm{d}x$

$$=\left|\int\limits_a^{x_1}f(x)\mathrm{d}x\right|+\left|\int\limits_{x_1}^{x_2}f(x)\mathrm{d}x\right|+...+\left|\int\limits_{x_n}^{b}f(x)\mathrm{d}x\right|$$

⌘ *Chú ý:* Ngoài cách trên, ta có thể dựa vào đồ thị để bỏ dấu giá trị tuyệt đối.

Ví dụ 2.1.

Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2$, trục hoành Ox, các đường thẳng $x=1$, $x=2$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Diện tích hình phẳng là $S=\int\limits_1^2|x^2|\mathrm{d}x=\int\limits_1^2 x^2\mathrm{d}x=\left.\frac{x^3}{3}\right|_1^2=\frac{8}{3}-\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$.

Ví dụ 2.2.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=(x-2)^2-1$, trục hoành và hai đường thẳng $x=1, x=2$ bằng

Lời giải

Xét phương trình $(x-2)^2-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3 \end{array}\right.$.

Ta có: $S=\int\limits_1^2\left|(x-2)^2-1\right|\mathrm{d}x=\int\limits_1^2\left|x^2-4x+3\right|\mathrm{d}x=\left|\int\limits_1^2(x^2-4x+3)\mathrm{d}x\right|=\frac{2}{3}$.

Ví dụ 2.3.

Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi $y=x^2-2x$, $y=0$, $x=-4$, $x=1$

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $x^2-2x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
VT		$+$	0	$-$	0	$+$	

Diện tích: $S=\int\limits_{-4}^{1}\left|x^2-2x\right|\mathrm{d}x=\int\limits_{-4}^{0}\left(x^2-2x\right)\mathrm{d}x-\int\limits_{0}^{1}\left(x^2-2x\right)\mathrm{d}x=\left.\left(\frac{x^3}{3}-x^2\right)\right|_{-4}^{0}-\left.\left(\frac{x^3}{3}-x^2\right)\right|_{0}^{1}=38$.

Ví dụ 2.4.

Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^3-1$, trục hoành, trục tung và đường thẳng $x=2$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm $x^3-1=0\Leftrightarrow x=1$.

x	0		1		2
x^3-1		$-$	0	$+$	

$$S=\int\limits_{0}^{2}\left|x^3-1\right|\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{1}\left|x^3-1\right|\mathrm{d}x+\int\limits_{1}^{2}\left|x^3-1\right|\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{1}\left(1-x^3\right)\mathrm{d}x+\int\limits_{1}^{2}\left(x^3-1\right)\mathrm{d}x=\left.\left(x-\frac{x^4}{4}\right)\right|_{0}^{1}+\left.\left(\frac{x^4}{4}-x\right)\right|_{1}^{2}=\frac{7}{2}.$$

Ví dụ 2.5.

Thể tích khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{x}$, trục Ox và hai đường thẳng $x=1$; $x=4$ khi quay quanh trục hoành được tính bởi công thức nào?

Lời giải

Thể tích khối tròn xoay giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\sqrt{x}$, trục Ox, $x=1$ và $x=4$ được tính bởi công thức $V=\pi\int\limits_{1}^{4}\left(\sqrt{x}\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int\limits_{1}^{4}x\mathrm{d}x$.

Dạng 3. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi y=f(x), y=g(x) và x=a, x=b

Phương pháp

⌘ *Diện tích hình phẳng giới hạn:* $\begin{cases} y=f(x) \\ y=g(x) \\ x=a; x=b \end{cases} \rightarrow S=\int_a^b \left|f(x)-g(x)\right| \mathrm{d}x$

Để phá bỏ dấu giá trị tuyệt đối ta thường làm như sau:

» **Bước 1:** Giải $f(x)=g(x)$ tìm nghiệm $x_1, x_2, \ldots, x_n \in (a;b)\ (a<x_1<x_2<\ldots<x_n<b)$.

» **Bước 2:** Tính $S=\int_a^{x_1}\left|f(x)-g(x)\right|\mathrm{d}x+\int_{x_1}^{x_2}\left|f(x)-g(x)\right|\mathrm{d}x+\ldots+\int_{x_n}^{b}\left|f(x)-g(x)\right|\mathrm{d}x$

$$=\left|\int_a^{x_1}\left(f(x)-g(x)\right)\mathrm{d}x\right|+\left|\int_{x_1}^{x_2}\left(f(x)-g(x)\right)\mathrm{d}x\right|+\ldots+\left|\int_{x_n}^{b}\left(f(x)-g(x)\right)\mathrm{d}x\right|$$

⌘ *Chú ý:* Ngoài cách trên, ta có thể dựa vào đồ thị để bỏ dấu giá trị tuyệt đối.

Ví dụ 3.1.

Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hàm số $y=x^4-4x^2+4$, $y=x^2$, đường thẳng $x=0$, $x=1$.

Lời giải

Diện tích hình phẳng cần tìm là: $S=\int_0^1\left|x^4-4x^2+4-x^2\right|\mathrm{d}x=\int_0^1\left|x^4-5x^2+4\right|\mathrm{d}x$

Vì $x^4-5x^2+4=\left(x^2-1\right)\left(x^2-4\right)\geq 0\ \forall x\in[0;1]$

Nên $S=\int_0^1\left(x^4-5x^2+4\right)\mathrm{d}x=\left.\left(\frac{x^5}{5}-\frac{5x^3}{3}+4x\right)\right|_0^1=\frac{1}{5}-\frac{5}{3}+4=\frac{38}{15}$.

Ví dụ 3.2.

Hình phẳng giới hạn bởi các đường cong $y=x(1-x)$ và $y=x^3-x$ có diện tích bằng?

Lời giải

$$x(1-x)=x^3-x \Leftrightarrow x^3+x^2-2x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-2 \\ x=1 \end{array}\right.$$

Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường cong $y=x(1-x)$ và $y=x^3-x$.

Khi đó $S=\int_{-2}^{1}\left|x^3+x^2-2x\right|\mathrm{d}x=\int_{-2}^{0}\left|x^3+x^2-2x\right|\mathrm{d}x+\int_0^1\left|x^3+x^2-2x\right|\mathrm{d}x$

$=\left|\int_{-2}^{0}\left(x^3+x^2-2x\right)\mathrm{d}x\right|+\left|\int_0^1\left(x^3+x^2-2x\right)\mathrm{d}x\right|=\frac{8}{3}+\frac{5}{12}=\frac{37}{12}$ (đvdt).

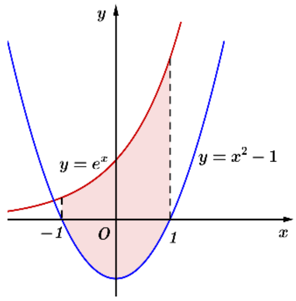
Ví dụ 3.3.

Tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường:

(1) $y=e^x,\ y=x^2-1,\ x=-1,\ x=1$; (2) $y=\sin x,\ y=x,\ x=\frac{\pi}{2},\ x=\pi$.

Lời giải

(1) $y=e^x,\ y=x^2-1,\ x=-1,\ x=1$;



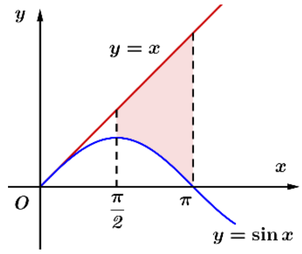
Xét $x\in[-1;1]:\begin{cases}e^x>0\\-(x^2-1)\ge 0\end{cases}\Rightarrow e^x-(x^2-1)>0$

$\Rightarrow\left|e^x-(x^2-1)\right|=e^x-x^2+1$.

Diện tích $S=\int\limits_{-1}^{1}\left|e^x-(x^2-1)\right|\mathrm{d}x$

$=\int\limits_{-1}^{1}(e^x-x^2+1)\mathrm{d}x=\left.\left(e^x-\frac{x^3}{3}+x\right)\right|_{-1}^{1}=\frac{3e^2+4e-3}{3e}$

(2) $y=\sin x,\ y=x,\ x=\frac{\pi}{2},\ x=\pi$.



Xét $x\in\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$: $\sin x\le 1<x\Rightarrow \sin x-x<0\Rightarrow|\sin x-x|=x-\sin x$.

Diện tích $S=\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}|\sin x-x|\mathrm{d}x=\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(x-\sin x)\mathrm{d}x=\left.\left(\frac{x^2}{2}+\cos x\right)\right|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=\frac{3\pi^2}{8}-1$.

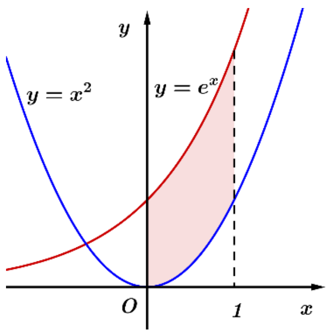
Ví dụ 3.4.

Tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường:

(1) $y=e^x,\ y=x^2,\ x=0,\ x=1$; (2) $y=\cos x,\ y=x+1,\ x=\frac{\pi}{2},\ x=\pi$.

Lời giải

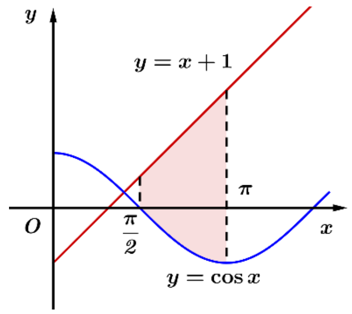
(1) $y=e^x,\ y=x^2,\ x=0,\ x=1$;



Xét $x\in[0;1]\begin{cases}e^x\ge 1\\x^2\le 1\end{cases}$ hay $\begin{cases}e^x\ge 1\\-x^2\ge -1\end{cases}\Rightarrow e^x-x^2\ge 0\Rightarrow\left|e^x-x^2\right|=e^x-x^2$

Diện tích $S=\int\limits_{0}^{1}\left|e^x-x^2\right|\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{1}(e^x-x^2)\mathrm{d}x=\left.\left(e^x-\frac{x^3}{3}\right)\right|_{0}^{1}=e-\frac{4}{3}$.

(2) $y=\cos x,\ y=x+1,\ x=\dfrac{\pi}{2},\ x=\pi$.



Xét $x\in\left[\dfrac{\pi}{2};\pi\right]:\cos x\le 1<x+1\Rightarrow \cos x-\left(x+1\right)<0$

$\Rightarrow \left|\cos x-\left(x+1\right)\right|=x+1-\cos x$.

Diện tích $S=\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left|\cos x-\left(x+1\right)\right|\mathrm{d}x$

$=\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(x+1-\cos x\right)\mathrm{d}x=\left.\left(\dfrac{x^2}{2}+x-\sin x\right)\right|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=\dfrac{3\pi^2+4\pi+8}{8}$.

Ví dụ 3.5.

Tìm a để diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi $\left(P\right):y=\dfrac{x^2-2x}{x-1}$, đường thẳng $d:y=x-1$ và $x=a,\ x=2a\ \ (a>1)$ bằng $\ln 3$?

Lời giải

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $(P):y=\dfrac{x^2-2x}{x-1}$, đường thẳng $d:y=x-1$ và $x=a,\ x=2a\ \ (a>1)$ là

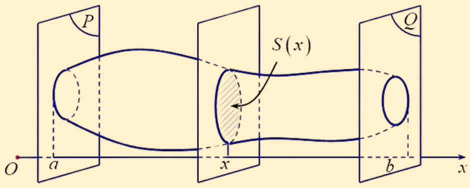
$S=\displaystyle\int_a^{2a}\left|\dfrac{x^2-2x}{x-1}-(x-1)\right|\mathrm{d}x=\int_a^{2a}\left|-\dfrac{1}{x-1}\right|dx=\left|\ln\left|x-1\right|\Big|_a^{2a}\right|=\left|\ln\dfrac{2a-1}{a-1}\right|=\ln 3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=2\\ a=\dfrac{4}{5}\end{array}\right.$.

Do $a>1$ nên $a=2$.

Dạng 4. Thể tích vật thể tính theo mặt cắt vuông góc trục hoành

Phương pháp

- Gọi B là phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại các điểm a và b, $S(x)$ là diện tích thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm x, $(a \le x \le b)$



Giả sử $S(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a;b]$

Khi đó, thể tích của vật thể B được xác định: $\boxed{V = \int_a^b S(x)\mathrm{d}x}$.

Ví dụ 4.1.

Tính thể tích V của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x=1$ và $x=3$, biết rằng khi cắt vật thể bởi mặt phẳng tùy ý vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(1 \le x \le 3)$ thì được thiết diện là một hình chữ nhật có hai cạnh là $3x$ và x^2

Lời giải

Ta có diện tích thiết diện: $S(x) = 3x.x^2 = 3x^3$.

Khi đó $V = \int_1^3 3x^3\mathrm{d}x = \frac{3}{4}x^4\Big|_1^3 = 60$.

Ví dụ 4.2.

Tính thể tích V của vật thể nằm giữa hai mặt phẳng $x=0$ và $x=\pi$, biết rằng thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(0 \le x \le \pi)$ là một tam giác đều cạnh $2\sqrt{\sin x}$.

Lời giải

Ta có diện tích thiết diện: $S(x) = \left(2\sqrt{\sin x}\right)^2.\frac{\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}\sin x$.

$V = \int_0^\pi S(x)\mathrm{d}x = \int_0^\pi \sqrt{3}\sin x\,\mathrm{d}x = -\sqrt{3}\cos x\Big|_0^\pi = 2\sqrt{3}$.

Ví dụ 4.3.

Cho phần vật thể $(\Im)$ giới hạn bởi hai mặt phẳng có phương trình $x=0$ và $x=2$. Cắt phần vật thể $(\Im)$ bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(0\le x\le 2)$, ta được thiết diện là một tam giác đều có độ dài cạnh bằng $x\sqrt{2-x}$. Tính thể tích V của phần vật thể $(\Im)$.

Lời giải

Ta có diện tích thiết diện: $S(x)=\dfrac{x^2(2-x)\sqrt{3}}{4}$.

$$V_{\Im}=\int_0^2 \frac{x^2(2-x)\sqrt{3}}{4}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{3}}{4}\int_0^2 x^2(2-x)\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{3}}{4}\int_0^2 x^2(2-x)\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4\right)\Bigg|_0^2=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Ví dụ 4.4.

Cho hình phẳng (H) được giới hạn bởi đường cong $y=\sqrt{m^2-x^2}$ (m là tham số khác 0) và trục hoành. Khi (H) quay xung quanh trục hoành được khối tròn xoay có thể tích V. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để $V<1000\pi$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của đường cong và trục hoành là:

$$\sqrt{m^2-x^2}=0\Leftrightarrow x=\pm m$$

Thể tích vật thể tròn xoay cần tính là: $V=\pi\displaystyle\int_{-|m|}^{|m|}\left(m^2-x^2\right)\mathrm{d}x=\pi\left(m^2x-\frac{1}{3}x^3\right)\Bigg|_{-|m|}^{|m|}=\frac{4\pi m^2|m|}{3}$

Ta có: $V<1000\pi\Leftrightarrow \dfrac{4\pi m^2|m|}{3}<1000\pi\Leftrightarrow |m|^3<750\Leftrightarrow -\sqrt[3]{750}<m<\sqrt[3]{750}$.

Ta có $\sqrt[3]{750}\simeq 9,08$ và $m\ne 0$.

Suy ra, các giá trị m nguyên là $m\in\{-9;-8;-7;-6;-5;-4;-3;-2;-1;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$

Vậy có 18 giá trị nguyên của m.

Dạng 5. Thể tích khối tròn xoay

Phương pháp

⌘ *Xoay miền hình phẳng giới hạn:* $\begin{cases} y = f(x) \\ Ox; x = a; x = b \end{cases}$ *quanh trục* Ox.

» **Bước 1:** Giải $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = c; c \in [a;b]$.

» **Bước 2:** Tính $V = \pi\int_a^b \left(f(x)\right)^2 \mathrm{d}x$

Ví dụ 5.1.

Tính thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường sau xung quanh trục Ox : $y = 2x - x^2, y = 0, x = 0, x = 2$.

Lời giải

Thể tích khối tròn xoay $V = \pi\int_0^2 \left(2x - x^2\right)^2 \mathrm{d}x = \frac{16\pi}{15}$.

Ví dụ 5.2.

Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{\tan x}$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$ quanh trục hoành là

Lời giải

Thể tích khối tròn xoay cần tính là $V = \pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \mathrm{d}x = \pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x = -\pi\ln\left|\cos x\right|\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi\ln 2}{2}$.

Ví dụ 5.3.

Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường cong quay quanh trục hoành

(1) $y = \sqrt{2 + \sin x}$, Ox và $x = 0$, $x = \pi$. ; (2) $y = x^2 + 3$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$.

Lời giải

(1) $y = \sqrt{2 + \sin x}$, Ox và $x = 0$, $x = \pi$. ;

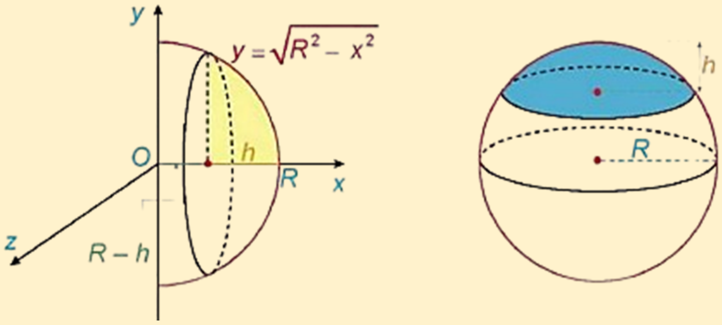
Ta có: $V = \pi\int_0^{\pi} \left(\sqrt{2 + \sin x}\right)^2 \mathrm{d}x = \pi\int_0^{\pi} (2 + \sin x)\mathrm{d}x = \pi(2x - \cos x)\Big|_0^{\pi} = 2\pi(\pi + 1)$.

(2) $y = x^2 + 3$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$.

Ta có: $V = \pi\int_0^2 \left(x^2 + 3\right)^2 \mathrm{d}x = \pi\int_0^2 \left(x^4 + 6x^2 + 9\right)\mathrm{d}x = \frac{202}{5}\pi$

Ví dụ 5.4.

Khối chỏm cầu có bán kính R và chiều cao h $\left(0<h\le R\right)$ sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi cung tròn có phương trình $y=\sqrt{R^2-x^2}$, trục hoành và hai đường thẳng $x=R-h$, $x=R$ xung quanh trục Ox. Tính thể tích của khối chỏm cầu này.



Lời giải

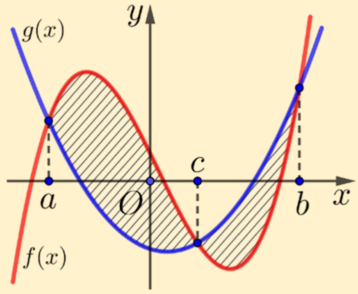
Ta có thể tích của khối chỏm cầu là

$$V=\pi\int\limits_{R-h}^{R}\left(R^2-x^2\right)\mathrm{d}x=\pi\left(R^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{R-h}^{R}=\pi\left[R^2.h-Rh\left(R-h\right)-\frac{h^3}{3}\right]=\pi\left(Rh^2-\frac{h^3}{3}\right).$$

Dạng 6. Từ đồ thị tính diện tích hình phẳng

Phương pháp

- **Trường hợp 1:** $\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases} \rightarrow$ diện tích hình phẳng cần tìm là $S = \int_a^b |f(x) - g(x)| \mathrm{d}x$.



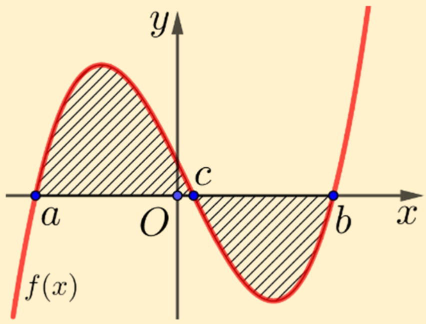
» **Bước 1:** Quan sát đồ thị thấy $f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow x = c; c \in [a;b]$.

» **Bước 2:** Xét hiệu $f(x) - g(x)$ trên các đoạn $[a;c];[c;b]$.

Giả sử trên $\begin{cases} [a;c]: f(x) - g(x) > 0 \\ [c;b]: f(x) - g(x) < 0 \end{cases}$.

» **Bước 3:** Khi đó $S = \int_a^b |f(x) - g(x)| \mathrm{d}x = \int_a^c (f(x) - g(x)) \mathrm{d}x + \int_c^b (g(x) - f(x)) \mathrm{d}x$

- **Trường hợp 2:** $\begin{cases} y = f(x) \\ Ox: y = 0 \end{cases} \rightarrow$ diện tích hình phẳng cần tìm là $S = \int_a^b |f(x) - 0| \mathrm{d}x$



» **Bước 1:** Quan sát đồ thị thấy $f(x) - 0 = 0 \Leftrightarrow x = c; c \in [a;b]$.

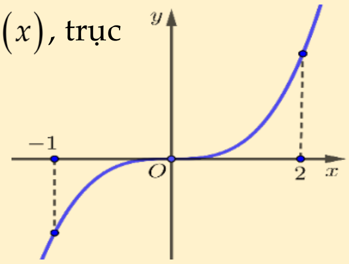
» **Bước 2:** Xét hiệu $f(x) - 0$ trên các đoạn $[a;c];[c;b]$.

Giả sử trên $\begin{cases} [a;c]: f(x) - 0 > 0 \\ [c;b]: f(x) - 0 < 0 \end{cases}$.

» **Bước 3:** Khi đó $S = \int_a^b |f(x) - 0| \mathrm{d}x = \int_a^c (f(x) - 0) \mathrm{d}x + \int_c^b (0 - f(x)) \mathrm{d}x$.

Ví dụ 6.1.

Gọi S là diện tích hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=-1$, $x=2$. Đặt $a=\int_{-1}^{0}f(x)\mathrm{d}x$, $b=\int_{0}^{2}f(x)\mathrm{d}x$, Khi đó tính S theo $a;b$.



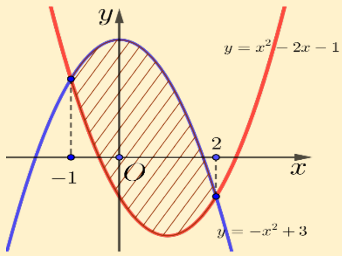
Lời giải

Ta có: $S=\int_{-1}^{2}\left|f(x)\right|\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}\left|f(x)\right|\mathrm{d}x+\int_{0}^{2}\left|f(x)\right|\mathrm{d}x$.

Ta thấy $f(x)\ge 0\,\forall x\in[0;2]; f(x)\le 0\,\forall x\in[-1;0]\to S=-\int_{-1}^{0}f(x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{2}f(x)\mathrm{d}x=-a+b$

Ví dụ 6.2.

Cho các hàm số $y=x^2-2x-1$ và $y=-x^2+3$ có đồ thị như hình vẽ bên. Xác định công thức và tính diện tích miền được gạch sọc ở hình bên.



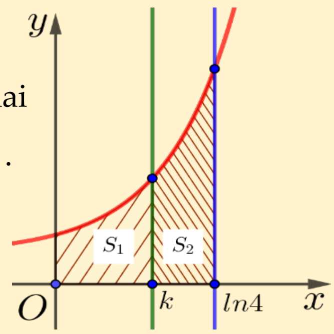
Lời giải

Ta có: $(H):\begin{cases}y=-x^2+3\\ y=x^2-2x-1\end{cases}$ và $-x^2+3=x^2-2x-1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=2\end{array}\right.$

Ta có: $S=\int_{-1}^{2}\left|(-x^2+3)-(x^2-2x-1)\right|\mathrm{d}x=\int_{-1}^{2}\left|-2x^2+2x+4\right|\mathrm{d}x=\int_{-1}^{2}\left(-2x^2+2x+4\right)\mathrm{d}x=9$.

Ví dụ 6.3.

Cho hình thang cong (H) giới hạn bởi các đường $y=e^x$, $y=0$, $x=0$, $x=\ln 4$. Đường thẳng $x=k\,(0<k<\ln 4)$ chia (H) thành hai phần có diện tích là S_1 và S_2 như hình vẽ bên. Tìm k để $S_1=2S_2$.



Lời giải

Ta có $S_1=\int_{0}^{k}e^x\mathrm{d}x=e^x\Big|_0^k=e^k-1$ và $S_2=\int_{k}^{\ln 4}e^x\mathrm{d}x=e^x\Big|_k^{\ln 4}=4-e^k$

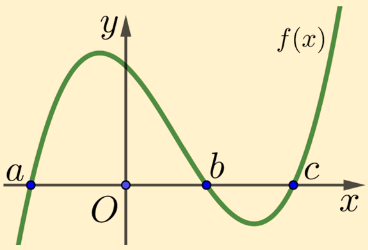
Ta có $S_1=2S_2\Leftrightarrow e^k-1=2\left(4-e^k\right)\Leftrightarrow k=\ln 3$.

Dạng 7. Từ diện tích hình phẳng tính giá trị hàm

Phương pháp

Áp dụng định nghĩa tích phân: $\int\limits_a^b f\left(x\right)\mathrm{d}x = F\left(x\right)\Big|_a^b = F\left(b\right) - F\left(a\right)$.

Thì lúc này đề bài yêu cầu so sánh $F\left(b\right);\ F\left(a\right)$.



Bài toán:

Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ liên tục có đồ thị như hình. $F\left(x\right)$ là nguyên hàm của $f\left(x\right)$ trên $\left[a;c\right]$

So sánh $F\left(a\right);F\left(c\right);F\left(x_i\right)\ x_i \in \left[a;c\right]$.

» **Bước 1:** So sánh $F\left(a\right);F\left(b\right)$.

Trên $\left[a;b\right]: f\left(x\right) > 0 \to \int\limits_a^b \left|f\left(x\right)\right|\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f\left(x\right)\mathrm{d}x = F\left(b\right) - F\left(a\right)$

Mà $\int\limits_a^b f\left(x\right)\mathrm{d}x > 0 \Rightarrow F\left(b\right) - F\left(a\right) > 0 \Leftrightarrow F\left(b\right) > F\left(a\right)$.

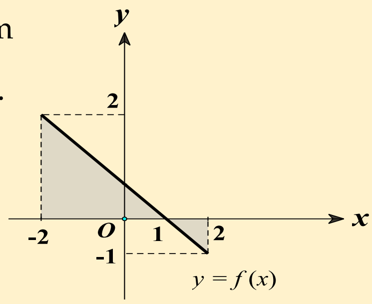
» **Bước 2:** Tương tự so sánh $F\left(b\right);F\left(c\right)$.

» **Bước 3:** Ta thấy diện tích hình phẳng giới hạn bởi $\begin{cases} y = f\left(x\right) \\ Ox \\ x = a; x = b \end{cases}$ lớn hơn $\begin{cases} y = f\left(x\right) \\ Ox \\ x = b; x = c \end{cases}$.

$$\int\limits_a^b \left|f\left(x\right)\right|\mathrm{d}x > \int\limits_b^c \left|f\left(x\right)\right|\mathrm{d}x \Rightarrow F\left(b\right) - F\left(a\right) > -F\left(c\right) + F\left(b\right) \Leftrightarrow -F\left(a\right) > -F\left(c\right) \to F\left(a\right) < F\left(c\right).$$

Ví dụ 7.1.

Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ xác định, liên tục và có một nguyên hàm là $F\left(x\right)$ trên $\left[-2;1\right]$ đồng thời $f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi các số sau: $F\left(2\right) - F\left(-2\right);\ F\left(-2\right) - F\left(1\right);\ F\left(2\right) - F\left(1\right);$ $F\left(2\right) - F\left(0\right)$ có bao nhiêu số dương?



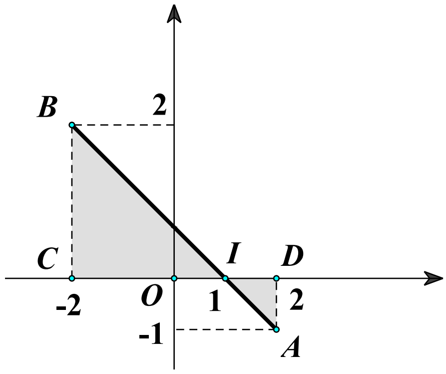
Lời giải

$S_{\Delta CIB} = \int\limits_{-2}^{1} f(x)\mathrm{d}x = F(1) - F(-2) > 0$

$S_{\Delta IDA} = \int\limits_{1}^{2} -f(x)\mathrm{d}x = F(1) - F(2) > 0$

$\int\limits_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{1}^{2} -f(x)\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow F(1) - F(0) = F(1) - F(2) \Leftrightarrow F(0) = F(2)$



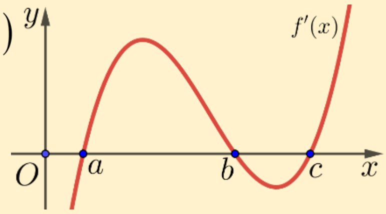
Mặt khác ta có $S_{\Delta CIB} > S_{\Delta DIA} \Leftrightarrow \int\limits_{-2}^{1} f(x)\mathrm{d}x > \int\limits_{1}^{2} -f(x)\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow F(1) - F(-2) > F(1) - F(2) \Leftrightarrow F(-2) < F(2) \Leftrightarrow F(2) - F(-2) > 0$

Vậy $F(2) - F(-2)$ là số dương.

Ví dụ 7.2.

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như trong hình vẽ bên. Hãy so sánh các số $f(a); f(b); f(c)$.



Lời giải

x	$-\infty$		a		b		c		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$f(a)$	$\nearrow$	$f(b)$	$\searrow$	$f(c)$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $f(b) > f(c)$, $f(a) < f(b)$ nên loại phương án **B, C**

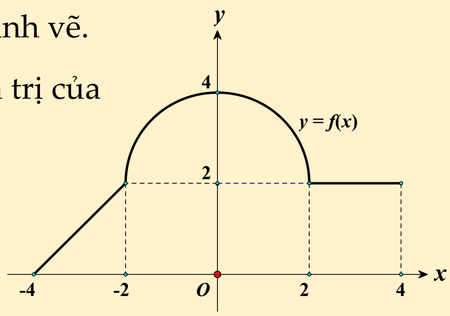
Mặt khác $\int\limits_{a}^{b} |f'(x)|\mathrm{d}x > \int\limits_{b}^{c} |f'(x)|\mathrm{d}x$

$\Rightarrow f(x)\Big|_a^b > -f(x)\Big|_b^c \Leftrightarrow f(b) - f(a) > -f(c) + f(b) \Leftrightarrow f(a) < f(c)$

Vậy $f(a) < f(c) < f(b)$.

Ví dụ 7.3.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị trên đoạn $[-4;4]$ như hình vẽ. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$, tính giá trị của $S = F(4) - F(-4)$.



Lời giải

$S=F(4)-F(-4)=\int_{-4}^{4}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-4}^{-2}f(x)\mathrm{d}x+\int_{-2}^{2}f(x)\mathrm{d}x+\int_{2}^{4}f(x)\mathrm{d}x$

$\int_{-4}^{-2}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}.2.2=2$; $\int_{-2}^{2}f(x)\mathrm{d}x=2.4+\frac{1}{2}\pi.2^2=8+2\pi$; $\int_{2}^{4}f(x)\mathrm{d}x=2.2=4$

Vậy $S=14+2\pi$.

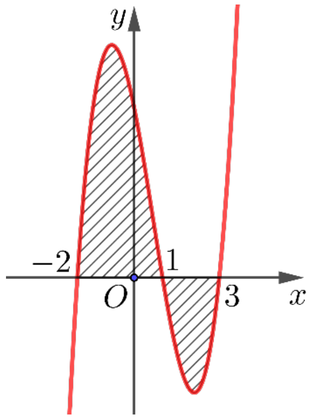
Chương 04

Bài 3. ỨNG DỤNG HÌNH HỌC CỦA TÍCH PHÂN

C Luyện tập

A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm

» Câu 1. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$, $y=0$, $x=-2$ và $x=3$ (như hình vẽ). Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?



A. $S=-\int\limits_{-2}^{1}f(x)\mathrm{d}x-\int\limits_{1}^{3}f(x)\mathrm{d}x$.

B. $S=\int\limits_{-2}^{1}f(x)\mathrm{d}x-\int\limits_{1}^{3}f(x)\mathrm{d}x$.

C. $S=-\int\limits_{-2}^{1}f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_{1}^{3}f(x)\mathrm{d}x$.

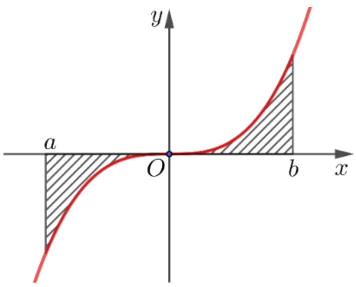
D. $S=\int\limits_{-2}^{1}f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_{1}^{3}f(x)\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $S=\int\limits_{-2}^{3}|f(x)|\mathrm{d}x=\int\limits_{-2}^{1}|f(x)|\mathrm{d}x+\int\limits_{1}^{3}|f(x)|\mathrm{d}x=\int\limits_{-2}^{1}f(x)\mathrm{d}x-\int\limits_{1}^{3}f(x)\mathrm{d}x$.

» Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Gọi D là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $(C):y=f(x)$, trục hoành, hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ (như hình vẽ dưới đây).



Giả sử S_D là diện tích hình phẳng D. Chọn công thức đúng trong các phương án A, B, C, D cho dưới đây?

A. $S_D=\int_a^0 f(x)\mathrm{d}x+\int_0^b f(x)\mathrm{d}x$.

B. $S_D=-\int_a^0 f(x)\mathrm{d}x+\int_0^b f(x)\mathrm{d}x$.

C. $S_D=\int_a^0 f(x)\mathrm{d}x-\int_0^b f(x)\mathrm{d}x$.

D. $S_D=-\int_a^0 f(x)\mathrm{d}x-\int_0^b f(x)\mathrm{d}x$.

Lời giải

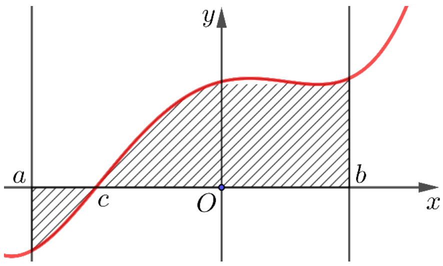
Chọn B

+ Nhìn đồ thị ta thấy:

- Đồ thị (C) cắt trục hoành tại $O(0;0)$
- Trên đoạn $[a;0]$, đồ thị (C) ở dưới trục hoành nên $|f(x)|=-f(x)$
- Trên đoạn $[0;b]$, đồ thị (C) ở trên trục hoành nên $|f(x)|=f(x)$

+ Do đó: $S_D=\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x=\int_a^0 |f(x)|\mathrm{d}x+\int_0^b |f(x)|\mathrm{d}x=-\int_a^0 f(x)\mathrm{d}x+\int_0^b f(x)\mathrm{d}x$.

» Câu 3. Diện tích của hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ $(a<b)$ tính theo công thức nào dưới đây ?



A. $S=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$.

B. $S=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

C. $S=-\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$.

D. $S=\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|$.

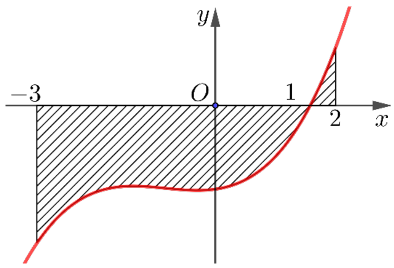
Lời giải

Chọn C

Diện tích của hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ là:

$S=\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x=\int_a^c |f(x)|\mathrm{d}x+\int_c^b |f(x)|\mathrm{d}x=-\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$.

» Câu 4. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=-3$, $x=2$. Đặt $a=\int_{-3}^{1} f(x)\mathrm{d}x$, $b=\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$.



Mệnh đề nào sau đây là **đúng**.

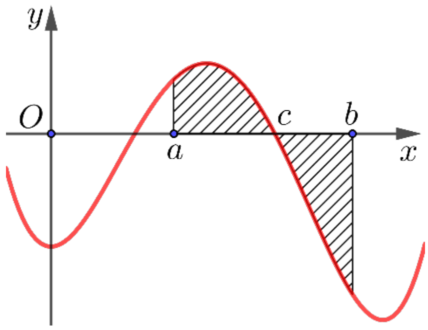
A. $S=a+b$. **B.** $S=a-b$. **C.** $S=-a-b$. **D.** $S=b-a$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $S=\int\limits_{-3}^{2}\left|f(x)\right|\mathrm{d}x=\int\limits_{-3}^{1}\left|f(x)\right|\mathrm{d}x+\int\limits_{1}^{2}\left|f(x)\right|\mathrm{d}x=-\int\limits_{-3}^{1}f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_{1}^{2}f(x)\mathrm{d}x=-a+b$.

» Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ có đồ thị như hình bên và $c\in[a;b]$. Gọi S là diện tích của hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$ và các đường thẳng $y=0$, $x=a$, $x=b$. Mệnh đề nào sau đây **sai?**



A. $S=\int\limits_{a}^{c}f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_{c}^{b}f(x)\mathrm{d}x$. **B.** $S=\int\limits_{a}^{c}f(x)\mathrm{d}x-\int\limits_{c}^{b}f(x)\mathrm{d}x$.

C. $S=\int\limits_{a}^{b}\left|f(x)\right|\mathrm{d}x$. **D.** $S=\int\limits_{a}^{c}f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_{b}^{c}f(x)\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn A

Ta có:

$$S=\int\limits_{a}^{b}\left|f(x)\right|\mathrm{d}x=\int\limits_{a}^{c}f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_{c}^{b}\left[-f(x)\right]\mathrm{d}x=\int\limits_{a}^{c}f(x)\mathrm{d}x-\int\limits_{c}^{b}f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{a}^{c}f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_{b}^{c}f(x)\mathrm{d}x.$$

» Câu 6. Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\sqrt[3]{x}$, trục hoành và hai đường thẳng $x=1$, $x=8$ là

A. $\frac{45}{2}$. **B.** $\frac{45}{4}$. **C.** $\frac{45}{7}$. **D.** $\frac{45}{8}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\sqrt[3]{x}\ge 0$ trên đoạn [1;8] nên $S=\int\limits_{1}^{8}\left|\sqrt[3]{x}\right|dx=\int\limits_{1}^{8}\sqrt[3]{x}dx=\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\Big|_{1}^{8}=\frac{45}{4}$.

» Câu 7. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=(x-2)^2-1$, trục hoành và hai đường thẳng $x=1,x=2$ bằng

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{3}{2}$. **D.** $\frac{7}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $S=\int\limits_{1}^{2}\left|(x-2)^2-1\right|\mathrm{d}x=\int\limits_{1}^{2}\left|x^2-4x+3\right|\mathrm{d}x=\left|\int\limits_{1}^{2}(x^2-4x+3)\mathrm{d}x\right|=\frac{2}{3}$.

» Câu 8. Tính diện tích S hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^2+1, x=-1, x=2$ và trục hoành.

A. $S=16$. **B.** $S=6$. **C.** $S=\frac{13}{6}$. **D.** $S=13$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $S=\int_{-1}^{2}\left|x^2+1\right|dx=\int_{-1}^{2}\left(x^2+1\right)dx=6$.

» Câu 9. Gọi S là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=2^x$, $y=1$, $x=0$, $x=2$. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. $S=\int_0^2\left|2^x-1\right|dx$. **B.** $S=\int_0^2\left|1-2^x\right|dx$. **C.** $S=\int_0^2\left(1-2^x\right)dx$. **D.** $S=\int_0^2\left(2^x-1\right)dx$.

Lời giải

Chọn C

Xét $x\in[0;2]$, ta có $2^x>2^0\Leftrightarrow 2^x>1$ nên $\left|2^x-1\right|=2^x-1$.

Diện tích hình phẳng cần tính là $S=\int_0^2\left|2^x-1\right|dx=\int_0^2\left|1-2^x\right|dx=\int_0^2\left(2^x-1\right)dx$.

» Câu 10. Hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=4+2x-x^2$, $y=x^2$, $x=-1$, $x=2$ có diện tích là

A. 9 đvdt. **B.** 12 đvdt. **C.** 15 đvdt. **D.** 6 đvdt.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $4+2x-x^2=x^2\Leftrightarrow -2x^2+2x+4=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1\\x=2\end{array}\right.$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=4+2x-x^2$, $y=x^2$, $x=-1$, $x=2$ là

$$S=\int_{-1}^{2}\left|4+2x-x^2-x^2\right|dx=\int_{-1}^{2}\left(4+2x-2x^2\right)dx=\left.\left(4x+x^2-\frac{2x^3}{3}\right)\right|_{-1}^{2}=9 \text{ (đvdt).}$$

» Câu 11. Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y=x^2+1$, trục hoành và các đường thẳng $x=0, x=3$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng

A. $V=12\pi$. **B.** $V=\frac{348\pi}{5}$. **C.** $V=32\pi$. **D.** $V=9\pi$.

Lời giải

Chọn B

$V=\pi\int_0^3\left(x^2+1\right)^2dx=\frac{348\pi}{5}$.

» Câu 12. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\cos x$, trục tung, trục hoành và đường thẳng $x=\pi$ bằng

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=\cos x$ và trục hoành là nghiệm phương trình

$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$. Xét trên $\left[0;\pi\right]$ suy ra $x = \frac{\pi}{2}$

Diện tích hình phẳng cần tính là $S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\mathrm{d}x - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x\mathrm{d}x = 2$.

» Câu 13. Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2$, trục hoành Ox, các đường thẳng $x = 1$, $x = 2$ là

A. $S = 8$. **B.** $S = \frac{7}{3}$. **C.** $S = \frac{8}{3}$. **D.** $S = 7$.

Lời giải

Chọn B

Diện tích hình phẳng là $S = \int_1^2 \left|x^2\right|\mathrm{d}x = \int_1^2 x^2\mathrm{d}x = \left.\frac{x^3}{3}\right|_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$.

» Câu 14. Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f\left(0\right) < 0 < f\left(-1\right)$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f\left(x\right)$, $y = 0$, $x = -1$ và $x = 1$. Xét các mệnh đề sau

(1) $S = \int_{-1}^{0} f\left(x\right)\mathrm{d}x + \int_0^1 \left|f\left(x\right)\right|\mathrm{d}x$. **(2)** $S = \int_{-1}^{1} \left|f\left(x\right)\right|\mathrm{d}x$.

(3) $S = \int_{-1}^{1} f\left(x\right)\mathrm{d}x$. **(4)** $S = \left|\int_{-1}^{1} f\left(x\right)\mathrm{d}x\right|$.

Số mệnh đề đúng là

A. 3. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

Ta có diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f\left(x\right)$, $y = 0$, $x = -1$ và $x = 1$ là $S = \int_{-1}^{1} \left|f\left(x\right)\right|\mathrm{d}x$ nên **(2)** đúng.

Do $f\left(0\right) < 0 < f\left(-1\right)$ nên $S = \int_{-1}^{1} f\left(x\right)\mathrm{d}x$ sai.

Tương tự $S = \left|\int_{-1}^{1} f\left(x\right)\mathrm{d}x\right|$ sai và $S = \int_{-1}^{0} f\left(x\right)\mathrm{d}x + \int_0^1 \left|f\left(x\right)\right|\mathrm{d}x$ sai.

» Câu 15. Khối chỏm cầu có bán kính $R = 3$ và chiều cao $h = 1$ sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi cung tròn có phương trình $y = \sqrt{9 - x^2}$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 2$, $x = 3$ xung quanh trục Ox. Tính thể tích khối chỏm cầu này.

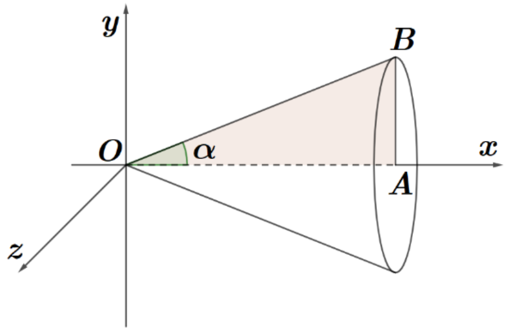
A. $\frac{8\pi}{3}$. **B.** 2π. **C.** $\frac{10\pi}{3}$. **D.** π.

Lời giải

Chọn A

Ta có thể tích khối chỏm cầu là $V = \pi\int_2^3 \left(9 - x^2\right)\mathrm{d}x = \pi\left.\left(9x - \frac{x^3}{3}\right)\right|_2^3 = \frac{8\pi}{3}$.

» **Câu 16.** Cho tam giác vuông OAB có cạnh $OA = a$ nằm trên tục Ox và $\widehat{AOB} = \dfrac{\pi}{3}$.



Gọi β là khối tròn xoay sinh ra khi quay miền tam giác OAB xung quanh trục Ox.

A. $3\pi a^3$. **B.** πa^3. **C.** $\dfrac{\pi a^3}{3}$. **D.** $\dfrac{\pi a^3}{9}$.

Lời giải

Chọn B

Do OB đi qua gốc tọa độ và tạo với Ox một góc $\dfrac{\pi}{3}$ nên $OB: y = \tan\dfrac{\pi}{3}.x = \sqrt{3}x$.

Khi đó, thể tích của khối β là: $V = \pi\int\limits_0^a \left(\sqrt{3}x\right)^2 \mathrm{d}x = \pi\int\limits_0^a 3x^2\mathrm{d}x = \pi x^3\Big|_0^a = \pi a^3$ (đvtt).

» **Câu 17.** Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích hình vuông cạnh bằng 1 và diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2 + 1$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 2$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $S_1 = S_2$. **B.** $S_1 > S_2$. **C.** $2S_1 = S_2$. **D.** $6S_1 = S_2$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\begin{cases} S_1 = 1 \\ S_2 = \int\limits_{-1}^{2}\left|x^2 + 1 - 0\right|\mathrm{d}x = 6 \end{cases} \Rightarrow 6S_1 = S_2$.

» **Câu 18.** Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2 + x - 2$, $y = 2x + 4$, $x = 1$ và $x = 4$.

Cho diện tích hình phẳng (H) bằng $\dfrac{a}{b}$ (đvdt), với $a, b \in \mathbb{N}$ và $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Giá trị $T = a + b$ bằng:

A. $T = 67$. **B.** $T = 25$. **C.** $T = 76$. **D.** $T = 23$.

Lời giải

Chọn A

Ta có diện tích hình phẳng (H) bằng $S = \int\limits_1^4\left|\left(x^2 + x - 2\right) - \left(2x + 4\right)\right|\mathrm{d}x = \int\limits_1^4\left|x^2 - x - 6\right|\mathrm{d}x$.

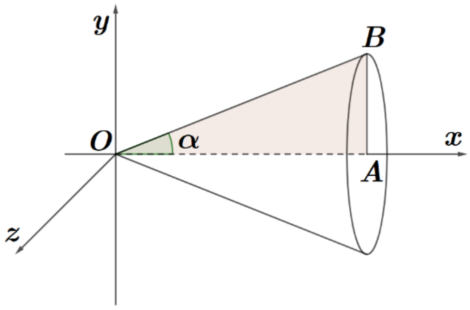
Phương trình $x^2 - x - 6 = 0$ có nghiệm $x = -2$ (loại), $x = 3$ (nhận).

Suy ra $S = \left|\int\limits_1^3\left(x^2 - x - 6\right)\mathrm{d}x\right| + \left|\int\limits_3^4\left(x^2 - x - 6\right)\mathrm{d}x\right| = \dfrac{22}{3} + \dfrac{17}{6} = \dfrac{61}{6}$.

Do đó $a = 61$ và $b = 6$.

Vậy $T = a + b = 67$.

» Câu 19. Cho tam giác vuông OAB có cạnh $OA = a$ nằm trên tục Ox và $\widehat{AOB} = \alpha\left(0 < \alpha \le \frac{\pi}{4}\right)$. Gọi β là khối tròn xoay sinh ra khi quay miền tam giác OAB xung quanh trục Ox. Tính thể tích V của β theo a và α.



A. $\dfrac{\pi\tan^2\alpha.a^3}{3}$. **B.** $\dfrac{3\pi\tan^2\alpha.a^3}{2}$. **C.** $\dfrac{\pi\sin^2\alpha.a^3}{3}$. **D.** $\dfrac{2\pi\cos^2\alpha.a^3}{3}$.

Lời giải

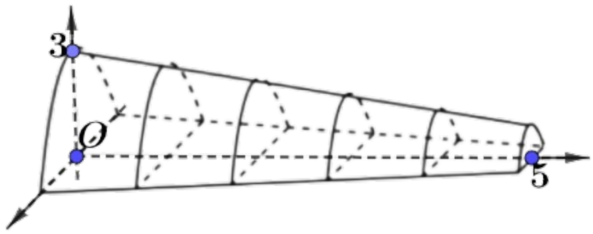
Chọn A

Do OB đi qua gốc tọa độ và tạo với Ox một góc α nên $OB: y = x.\tan\alpha$.

Khi đó, thể tích của khối β là:

$$V = \pi\int_0^a (x.\tan\alpha)^2\,\mathrm{d}x = \pi\tan^2\alpha\int_0^a x^2\mathrm{d}x = \frac{\pi\tan^2\alpha.x^3}{3}\Big|_0^a = \frac{\pi\tan^2\alpha.a^3}{3} \text{ (đvtt).}$$

» Câu 20. Cho một mô hình $3D$ mô phỏng một đường hầm như hình vẽ bên.



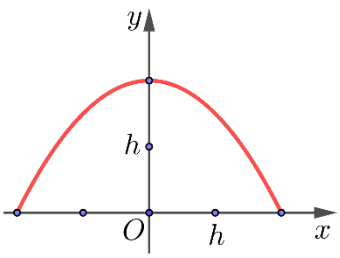
Chiều dài của đường hầm mô hình là 5cm, mặt phẳng vuông góc với mặt đáy của đường hầm tạo được thiết diện là một hình parabol, thiết diện có độ dài cạnh đáy gấp đôi chiều cao. Tính thể tích không gian bên trong đường hầm mô hình, biết chiều cao của mỗi thiết diện parabol cho bởi công thức $y = 3 - \frac{2}{5}x$ (đơn vị là cm), với x là khoảng cách tính từ lối vào lớn hơn của đường hầm mô hình. Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị.

A. 29. **B.** 30. **C.** 28. **D.** 31.

Lời giải

Chọn A

Xét một thiết diện parabol có chiều cao là h và độ dài đáy $2h$ và chọn hệ trục Oxy như hình vẽ bên



Parabol (P) có phương trình $(P): y = ax^2 + h, (a < 0)$

Có $B(h;0)\in(P)\Leftrightarrow 0=ah^2+h\Leftrightarrow a=-\dfrac{1}{h}\,(do\,h>0)$

Diện tích S của thiết diện: $S=\int\limits_{-h}^{h}\left(-\dfrac{1}{h}x^2+h\right)\mathrm{d}x=\dfrac{4h^2}{3}$, kết hợp chiều cao $h=3-\dfrac{2}{5}x$

Ta được diện tích thiết diện là $S(x)=\dfrac{4}{3}\left(3-\dfrac{2}{5}x\right)^2$.

Thể tích không gian bên trong của đường hầm mô hình:

$V=\int\limits_0^5 S(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^5\dfrac{4}{3}\left(3-\dfrac{2}{5}x\right)^2\mathrm{d}x\approx 28,888$

Vậy $V\approx 29\left(\mathrm{cm}^3\right)$.

» Câu 21. Các nhà kinh tế sử dụng đường cong Lorenz để minh họa sự phân phối thu nhập trong một quốc gia. Gọi x là đại diện cho phần trăm số gia đình trong một quốc gia và y là phần trăm tổng thu nhập, mô hình $y=x$ sẽ đại diện cho một quốc gia mà các gia đình có thu nhập như nhau. Đường cong Lorenz $y=f(x)$, biểu thị sự phân phối thu nhập thực tế. Diện tích giữa hai mô hình này, với $0\le x\le 100$, biểu thị "sự bất bình đẳng về thu nhập" của một quốc gia. Năm 2009, đường cong Lorenz của Hoa Kỳ có thể được mô hình hóa bởi hàm số

$$y=\left(0,00061x^2+0,0224x+1,666\right)^2,0\le x\le 100,$$

Trong đó x được tính từ các gia đình nghèo nhất đến giàu có nhất. Sự bất bình đẳng về thu nhập của Hoa Kì vào năm 2009 có giá trị gần nhất với giá trị nào dưới đây?

A. $7922,9$. **B.** $2922,9$. **C.** $2085,5$. **D.** $2077,1$.

Lời giải

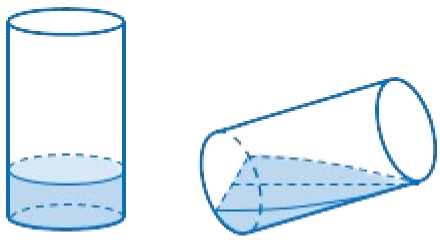
Chọn C

Sự bất bình đẳng về thu nhập của Hoa Kì vào năm 2009 là diện tích hình phẳng S giới hạn bởi hai đồ thị:

$$\begin{cases} y=x\\ y=\left(0,00061x^2+0,0224x+1,666\right)^2\\ x=0;x=100\end{cases}\Rightarrow S=\int\limits_0^{100}\left|\left(0,00061x^2+0,0224x+1,666\right)^2-x\right|\mathrm{d}x.$$

Sử dụng máy tính cầm tay, ta được $S\approx 2085,5$.

» Câu 22. Cho một cái cốc thủy tinh hình trụ bán kính đáy là 6 cm, chiều cao là 10 cm đang đựng một lượng nước. Tính thể tích lượng nước trong cốc, biết khi nghiêng cốc nước vừa lúc khi nước chạm miệng cốc thì ở đáy mực nước trùng với đường kính đáy?



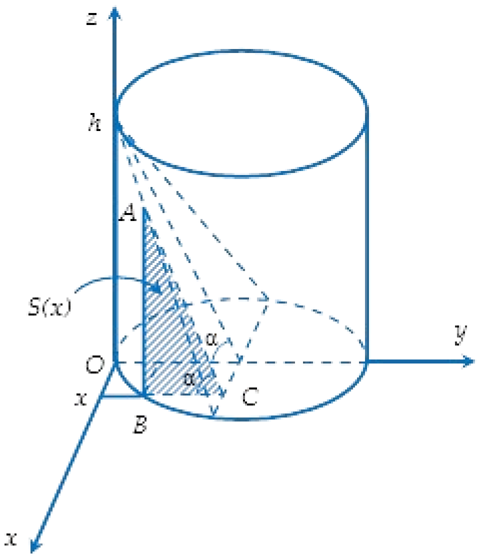
A. $240\ \mathrm{cm}^3$. **B.** $250\ \mathrm{cm}^3$. **C.** $245\ \mathrm{cm}^3$. **D.** $249\ \mathrm{cm}^3$.

Lời giải

Chọn A

Cốc hình trụ có bán kính $R = 6$ cm, chiều cao $h = 10$ cm.

Gán hệ trục tọa độ như hình vẽ bên



Một mặt phẳng tùy ý vuông góc với trục Ox tại điểm x ($-6 \le x \le 6$) cắt vật thể theo thiết diện có diện tích là $S(x)$.

Ta thấy thiết diện đó là một tam giác ABC vuông tại B như trong hình vẽ.

Ta có $S(x) = S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AB \cdot BC = \dfrac{1}{2}BC^2 \tan\alpha = \dfrac{1}{2}\left(R^2 - x^2\right)\dfrac{h}{R} = \dfrac{5\left(36 - x^2\right)}{6}$.

Vậy thể tích lượng nước trong cốc là $V = \int\limits_{-6}^{6} S(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{-6}^{6} \dfrac{5\left(36 - x^2\right)}{6}\mathrm{d}x = 240\ \text{cm}^3$.

b) Tìm α sao cho thể tích V lớn nhất.

Xét hàm số $y = \tan\alpha$ với $0 < \alpha \le \dfrac{\pi}{4}$.

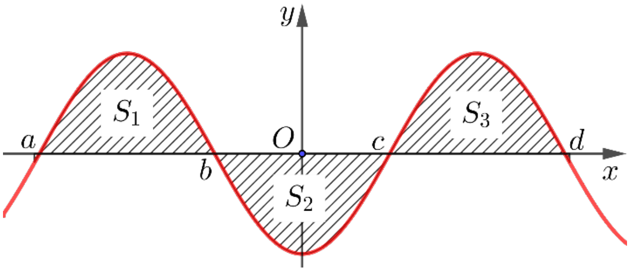
Ta có: $y' = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} > 0, \forall\alpha \in \left(0; \dfrac{\pi}{4}\right]$ nên hàm số $y = \tan\alpha$ đồng biến trên $\left(0; \dfrac{\pi}{4}\right]$.

Khi đó, $y = \tan\alpha \le \tan\dfrac{\pi}{4} = 1, \forall\alpha \in \left(0; \dfrac{\pi}{4}\right] \Rightarrow V = \dfrac{\pi\tan^2\alpha a^3}{3} \le \dfrac{\pi a^3}{3}$.

Đẳng thức xảy ra khi $\tan\alpha = 1$ hay $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$.

B. Câu hỏi – Trả lời Đúng/sai

» Câu 23. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a;d]$ và có đồ thị như hình vẽ. Biết đồ thị $f(x)$ cắt trục hoành tại 4 điểm a,b,c,d, đồng thời tạo với trục hoành và 2 đường thẳng $x = a, x = d$ thành một hình phẳng (H) gồm 3 phần có diện tích lần lượt là S_1, S_2, S_3 như hình vẽ.



Xét tính đúng, sai của 4 mệnh đề sau:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$S_1=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$		
(b)	$S_2=-\int_c^b \lvert f(x)\rvert \mathrm{d}x$		
(c)	$S_3=-\int_c^d f(x)\mathrm{d}x$		
(d)	$S_{(H)}=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\int_b^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^d f(x)\mathrm{d}x$		

Lời giải

(a) $S_1=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Dựa vào hình vẽ, ta có: $S_1=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

» Chọn ĐÚNG.

(b) $S_2=-\int_c^b \lvert f(x)\rvert \mathrm{d}x$.

Dựa vào hình vẽ, ta có: $S_2=\int_c^b \lvert f(x)\rvert \mathrm{d}x=-\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$ (do $f(x)\le 0, x\in[b;c]$).

» Chọn SAI.

(c) $S_3=-\int_c^d f(x)\mathrm{d}x$.

Dựa vào hình vẽ, ta có: $S_3=\int_c^d \lvert f(x)\rvert \mathrm{d}x=\int_c^d f(x)\mathrm{d}x$ (do $f(x)\ge 0, x\in[c;d]$).

» Chọn SAI.

(d) $S_{(H)}=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\int_b^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^d f(x)\mathrm{d}x$.

Dựa vào hình vẽ, ta có: $S_{(H)}=\int_a^d \lvert f(x)\rvert \mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\int_b^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^d f(x)\mathrm{d}x$.

» Chọn ĐÚNG.

» Câu 24. Cho hai hàm số $f(x)=-x^2+4$ và $g(x)=x-1$. Xét tính đúng, sai của các mệnh đề sau:

	Mệnh đề	Đúng	Sai

(a)	Diện tích hình phẳng (H_1) tạo bởi $f(x), Ox$ và hai đường thẳng $x=-3, x=3$ là $S_{(H_1)}=\int_{-3}^{3}\lvert f(x)\rvert\mathrm{d}x=\frac{46}{3}$		
(b)	Diện tích hình phẳng (H_2) tạo bởi $f(x), Ox$ và hai đường thẳng $x=-2, x=2$ là $S_{(H_2)}=\int_{-2}^{2} f(x)\mathrm{d}x=\frac{32}{3}$		
(c)	Diện tích hình phẳng (H_3) tạo bởi $g(x), Ox$ và hai đường thẳng $x=-3, x=3$ là $S_{(H_3)}=\left\lvert\int_{-3}^{1} g(x)\mathrm{d}x+\int_{1}^{3} g(x)\mathrm{d}x\right\rvert=6$		
(d)	Diện tích hình phẳng (H_4) tạo bởi $g(x), Ox$ và hai đường thẳng $x=-3, x=3$ là $S_{(H_4)}=-\int_{-3}^{1} g(x)\mathrm{d}x+\int_{1}^{3} g(x)\mathrm{d}x=10$.		

Lời giải

(a) Diện tích hình phẳng (H_1) tạo bởi $f(x), Ox$ và hai đường thẳng $x=-3, x=3$ là $S_{(H_1)}=\int_{-3}^{3}\lvert f(x)\rvert\mathrm{d}x=\frac{46}{3}$

Ta có: $S_{(H_1)}=\int_{-3}^{3}\lvert f(x)\rvert\mathrm{d}x=\frac{46}{3}$.

» Chọn ĐÚNG.

(b) Diện tích hình phẳng (H_2) tạo bởi $f(x), Ox$ và hai đường thẳng $x=-2, x=2$ là $S_{(H_2)}=\int_{-2}^{2} f(x)\mathrm{d}x=\frac{32}{3}$

Ta có: $S_{(H_2)}=\int_{-2}^{2}\lvert f(x)\rvert\mathrm{d}x=\int_{-2}^{2} f(x)\mathrm{d}x=\frac{32}{3}$ (do $f(x)\geq 0, x\in[-2;2]$)

» Chọn ĐÚNG.

(c) Diện tích hình phẳng (H_3) tạo bởi $g(x), Ox$ và hai đường thẳng $x=-3, x=3$ là $S_{(H_3)}=\left\lvert\int_{-3}^{1} g(x)\mathrm{d}x+\int_{1}^{3} g(x)\mathrm{d}x\right\rvert=6$.

Ta có: $S_{(H_3)}=\int_{-3}^{3}\lvert g(x)\rvert\mathrm{d}x=-\int_{-3}^{1} g(x)\mathrm{d}x+\int_{1}^{3} g(x)\mathrm{d}x=10$ (do $g(x)\leq 0, x\in[-3;1]$ và $g(x)\geq 0, x\in[1;3]$).

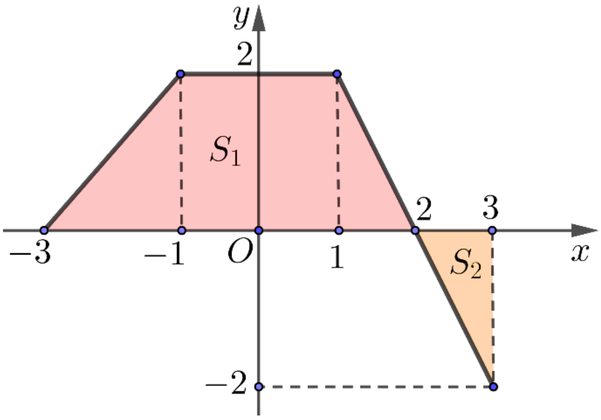
» Chọn SAI.

(d) Diện tích hình phẳng (H_4) tạo bởi $g(x), Ox$ và hai đường thẳng $x=-3, x=3$ là $S_{(H_4)}=-\int_{-3}^{1} g(x)\mathrm{d}x+\int_{1}^{3} g(x)\mathrm{d}x=10$.

Ta có: $S_{(H_4)}=\int_{-3}^{3}\lvert g(x)\rvert\mathrm{d}x=-\int_{-3}^{1} g(x)\mathrm{d}x+\int_{1}^{3} g(x)\mathrm{d}x=10$ (do $g(x)\leq 0, x\in[-3;1]$ và $g(x)\geq 0, x\in[1;3]$).

» Chọn ĐÚNG.

» **Câu 25.** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\left[-3;3\right]$ có đồ thị như hình vẽ, Biết rằng $f\left(x\right)$ tạo với trục hoành và 2 đường thẳng $x=-3,x=3$ một hình phẳng $\left(H\right)$ gồm 2 phần có diện tích lần lượt là S_1,S_2.



Xét tính đúng, sai của 4 mệnh đề sau:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$S_{(H)}=\int_{-3}^{3}f\left(x\right)\mathrm{d}x$		
(b)	$S_2=\left\|\int_{2}^{3}\left(-2x+4\right)\mathrm{d}x\right\|=1$		
(c)	$S_1=\int_{-3}^{-1}\left(x+3\right)\mathrm{d}x+\int_{-1}^{1}2\mathrm{d}x+\int_{1}^{2}\left(-2x+4\right)\mathrm{d}x$		
(d)	$S_{(H)}=S_1-\int_{2}^{3}\left(-2x+4\right)\mathrm{d}x$		

Lời giải

Xét hàm số $y=f\left(x\right)$, ta có:

$$f\left(x\right)=\begin{cases}x+3, & x\in\left[-3;-1\right]\\ 2, & x\in\left[-1;1\right]\\ -2x+4, & x\in\left[1;3\right]\end{cases}$$

(a) $S_{(H)}=\int_{-3}^{3}f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

Ta có: $S_{(H)}=\int_{-3}^{3}\left|f\left(x\right)\right|\mathrm{d}x$.

» **Chọn** SAI.

(b) $S_2=\left|\int_{2}^{3}\left(-2x+4\right)\mathrm{d}x\right|=1$.

Do $f\left(x\right)=-2x+4\le 0,x\in\left[2;3\right]$ nên $S_2=\int_{2}^{3}\left|-2x+4\right|\mathrm{d}x=\left|\int_{2}^{3}\left(-2x+4\right)\mathrm{d}x\right|=1$.

» **Chọn** ĐÚNG.

(c) $S_1=\int\limits_{-3}^{-1}(x+3)\mathrm{d}x+\int\limits_{-1}^{1}2\mathrm{d}x+\int\limits_{1}^{2}(-2x+4)\mathrm{d}x$.

Dựa vào hình vẽ, ta có: $S_1=\int\limits_{-3}^{2}|f(x)|\mathrm{d}x=\int\limits_{-3}^{-1}(x+3)\mathrm{d}x+\int\limits_{-1}^{1}2\mathrm{d}x+\int\limits_{1}^{2}(-2x+4)\mathrm{d}x$.

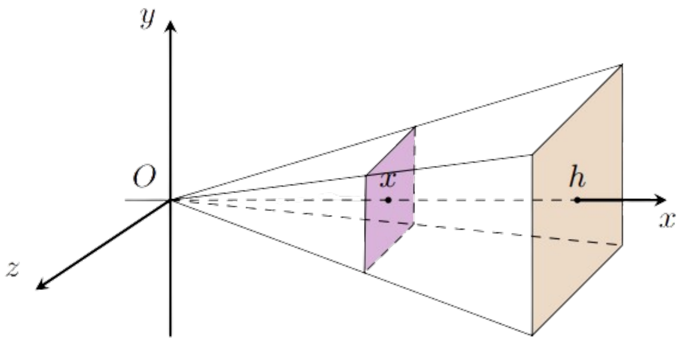
» Chọn ĐÚNG.

(d) $S_{(H)}=S_1-\int\limits_{2}^{3}(-2x+4)\mathrm{d}x$.

Ta có: $S_{(H)}=\int\limits_{-3}^{3}|f(x)|\mathrm{d}x=S_1+S_2=S_1-\int\limits_{2}^{3}(-2x+4)\mathrm{d}x$.

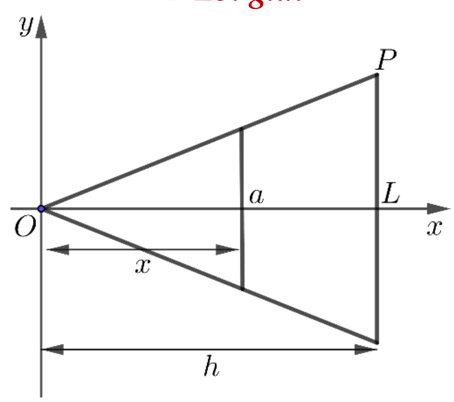
» Chọn ĐÚNG.

» Câu 26. Cho khối chóp đều có đáy là hình vuông cạnh L và chiều cao là h. Chọn trục Ox sao cho gốc O trùng với đỉnh của khối chóp và trục đi qua tâm của đáy. (như hình dưới).



	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Đáy của khối chóp nằm trên mặt phẳng song song với Ox.		
(b)	Mỗi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ bằng $x\ (0\le x\le h)$, cắt khối chóp theo mặt cắt là hình vuông cạnh a.		
(c)	Diện tích mặt cắt là $S(x)=\frac{L}{h}x^2$.		
(d)	Thể tích của khối chóp là $V=\frac{1}{3}L^2h$.		

Lời giải



(a) Đáy của khối chóp nằm trên mặt phẳng song song với Ox.

Đáy của khối chóp nằm trên mặt phẳng vuông góc với Ox tại $x=h$.

» Chọn SAI.

(b) *Mỗi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ bằng $x\left(0\le x\le h\right)$, cắt khối chóp theo mặt cắt là hình vuông cạnh a.*

Mỗi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ bằng $x\left(0\le x\le h\right)$, cắt khối chóp theo mặt cắt là hình vuông có cạnh là a.

» Chọn ĐÚNG.

(c) *Diện tích mặt cắt là $S\left(x\right)=\frac{L}{h}x^2$.*

Theo định lí Tha-les, ta có $\frac{x}{h}=\frac{\frac{a}{2}}{\frac{L}{2}}$, suy ra $a=\frac{L}{h}x$.

Do đó, diện tích của mặt cắt này là $S\left(x\right)=\frac{L^2}{h^2}x^2$.

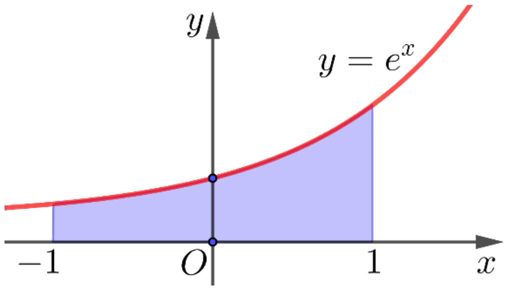
» Chọn SAI.

(d) *Thể tích của khối chóp là $V=\frac{1}{3}L^2h$.*

Thể tích của khối chóp này là $V=\int_0^h S\left(x\right)\mathrm{d}x=\int_0^h \frac{L^2}{h^2}x^2\,\mathrm{d}x=\left.\frac{L^2}{h^2}\frac{x^3}{3}\right|_0^h=\frac{1}{3}L^2h$.

» Chọn ĐÚNG.

» Câu 27. Cho đồ thị hàm số $y=\mathrm{e}^x$ và hình được tô màu như dưới.



	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Hình phẳng được tô màu giới hạn bởi 3 đường		
(b)	Diện tích hình phẳng được tính bởi công thức $S=\int\limits_{-1}^{1}\left(e^x\right)^2\mathrm{d}x$		
(c)	Diện tích hình phẳng $S=e-\frac{1}{e}$		
(d)	Thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng đó quanh trục Ox là $V=\frac{1}{2}\pi\left(e^2-\frac{1}{e^2}\right)$		

Lời giải

(a) *Hình phẳng được tô màu giới hạn bởi 3 đường.*

Hình phẳng đó giới hạn bởi bốn đường $y=e^x$, trục hoành và hai đường thẳng $x=-1$, $x=1$.

» Chọn SAI.

(b) *Diện tích hình phẳng được tính bởi công thức* $S=\int_{-1}^{1}\left(e^x\right)^2\,dx$.

Ta có diện tích hình phẳng $S=\int_{-1}^{1}\left|e^x\right|dx=\int_{-1}^{1}e^x\,dx$.

» Chọn SAI.

(c) *Diện tích hình phẳng* $S=e-\frac{1}{e}$.

Ta có diện tích hình phẳng $S=\int_{-1}^{1}e^x\,dx=e^x\Big|_{-1}^{1}=e-\frac{1}{e}$.

» Chọn ĐÚNG.

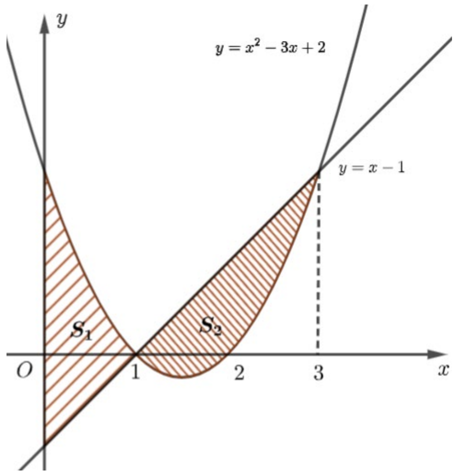
(d) *Thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng đó quanh trục* Ox *là* $V=\frac{1}{2}\pi\left(e^2-\frac{1}{e^2}\right)$.

Ta có thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng đó quanh trục Ox là

$$V=\pi\int_{-1}^{1}\left(e^x\right)^2dx=\pi\int_{-1}^{1}e^{2x}dx=\pi\left(\frac{1}{2}e^{2x}\Big|_{-1}^{1}\right)=\frac{1}{2}\pi\left(e^2-\frac{1}{e^2}\right).$$

» Chọn ĐÚNG.

» Câu 28. Cho đồ thị hàm số $y=x^2-3x+2$ và $y=x-1$ và $S_1;S_2$ là phần diện tích phần được tô như trong hình dưới.



	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2-3x+2$ và $y=x-1$ là $\int_0^3\left(-x^2+4x-3\right)dx$		
(b)	$S_1=\frac{4}{3}$		
(c)	$S_1=S_2$		
(d)	Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2-3x+2$; $y=x-1$; $x=0$; $x=3$ là $\int_0^3\left(-x^2+4x-3\right)dx=1$.		

Lời giải

(a) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2-3x+2$ và $y=x-1$ là $\int_0^3\left(-x^2+4x-3\right)\mathrm{d}x$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2-3x+2$ và $y=x-1$ là

$$\int_1^3\left(x-1-\left(x^2-3x+2\right)\right)dx=\int_1^3\left(-x^2+4x-3\right)dx.$$

» Chọn SAI.

(b) $S_1=\frac{4}{3}$.

$$S_1=\int_0^1\left(x^2-3x+2-(x-1)\right)dx=\int_0^1\left(x^2-4x+3\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}-2x^2+3x\right)\Big|_0^1=\frac{1}{3}-2+3=\frac{4}{3}.$$

» Chọn ĐÚNG.

(c) $S_1=S_2$.

$$S_2=\int_1^3\left(x-1-\left(x^2-3x+2\right)\right)dx=\int_1^3\left(-x^2+4x-3\right)dx=\left(-\frac{x^3}{3}+2x^2-3x\right)\Big|_1^3$$

$$=-9+18-9-\left(-\frac{1}{3}+2-3\right)=\frac{4}{3}$$

Vậy $S_1=S_2$.

» Chọn ĐÚNG.

(d) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2-3x+2$; $y=x-1$; $x=0$; $x=3$ là $\int_0^3\left(-x^2+4x-3\right)\mathrm{d}x=1$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2-3x+2$; $y=x-1$; $x=0$; $x=3$ là

$$\int_0^3\left|-x^2+4x-3\right|dx=S_1+S_2=\frac{8}{3}.$$

» Chọn SAI.

» Câu 29. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=-\sin x$, $y=1$, $x=a\left(0\le a\le\pi\right)$, $x=\pi$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Nếu $a=\pi$ thì diện tích của (H) bằng 0.		
(b)	Nếu $a=0$ thì diện tích của (H) bằng $\pi+2$.		
(c)	Nếu diện tích của hình (H) là $S=\pi-a+\frac{3}{2}$ thì $\frac{\pi}{a}$ là số nguyên chia hết cho 9.		
(d)	Nếu diện tích của hình (H) là S' thì $\int_a^\pi \sin x\mathrm{d}x=S'-\pi-a$.		

Lời giải

(a) Nếu $a=\pi$ thì diện tích của (H) bằng 0.

Nếu $a=\pi$ thì diện tích của (H) bằng $\int_\pi^\pi\left|1+\sin x\right|\mathrm{d}x=0$.

» **Chọn** ĐÚNG.

(b) *Nếu $a=0$ thì diện tích của (H) bằng $\pi+2$.*

b) Đúng.

Nếu $a=0$ thì diện tích của (H) bằng $\int_0^{\pi}|1+\sin x|\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}(1+\sin x)\mathrm{d}x=(x-\cos x)\Big|_0^{\pi}=\pi+2$.

» **Chọn** ĐÚNG.

(c) *Nếu diện tích của hình (H) là $S=\pi-a+\dfrac{3}{2}$ thì $\dfrac{\pi}{a}$ là số nguyên chia hết cho 9.*

Diện tích của hình (H) là $S=\int_a^{\pi}|1+\sin x|\mathrm{d}x=\int_a^{\pi}(1+\sin x)\mathrm{d}x=(x-\cos x)\Big|_a^{\pi}=\pi+1-a+\cos a$.

Theo đề, ta có: $S=\pi-a+\dfrac{3}{2}$

Nên $\pi+1-a+\cos a=\pi-a+\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow\cos a=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow a=\dfrac{\pi}{3}$ (vì $0\le a\le\pi$).

Do đó, $\dfrac{\pi}{a}=\dfrac{\pi}{\frac{\pi}{3}}=3$ và không chia hết cho 9.

» **Chọn** SAI.

(d) *Nếu diện tích của hình (H) là S' thì $\int_a^{\pi}\sin x\mathrm{d}x=S'-\pi-a$.*

Diện tích của hình (H) là:

$$S'=\int_a^{\pi}|1+\sin x|\mathrm{d}x=\int_a^{\pi}(1+\sin x)\mathrm{d}x=x\Big|_a^{\pi}+\int_a^{\pi}\sin x\mathrm{d}x=\pi-a+\int_a^{\pi}\sin x\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow\int_a^{\pi}\sin x\mathrm{d}x=S'-\pi+a.$$

» **Chọn** SAI.

» **Câu 30.** Trong mặt phẳng Oxy, cho hàm số $y=x+\sqrt{x}$ và $y=x+x^2$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Hoành độ giao điểm của đồ thị hai hàm số trên là $x=0$ hoặc $x=-1$		
(b)	Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số trên và $x=0$, $x=1$ được tính theo công thức $S=\int_0^1\left(\sqrt{x}-x^2\right)\mathrm{d}x$		
(c)	Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số trên và $x=0$, $x=1$ được tính theo công thức $S=\int_0^1\left(x+x^2\right)\mathrm{d}x-\int_0^1\left(x+\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x$		
(d)	Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số trên và $x=0$, $x=1$ bằng $\dfrac{1}{3}$ đvdt		

Lời giải

(a) *Hoành độ giao điểm của đồ thị hai hàm số trên là $x=0$ hoặc $x=-1$.*

Phương trình hoành giao độ giao điểm của hai đồ thị hàm số trên là

$$x+\sqrt{x}=x+x^2 \Leftrightarrow x=x^4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array}\right..$$

» Chọn SAI.

(b) *Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số trên và $x=0$, $x=1$ được tính theo công thức $S=\int_0^1\left(\sqrt{x}-x^2\right)\mathrm{d}x$.*

Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi các đường $y=x+\sqrt{x}$, $y=x+x^2$, $x=0$, $x=1$ là:

$$S=\int_0^1\left|\left(x+\sqrt{x}\right)-\left(x+x^2\right)\right|\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1\left|\sqrt{x}-x^2\right|\mathrm{d}x=\int_0^1\left(\sqrt{x}-x^2\right)\mathrm{d}x.$$

» Chọn ĐÚNG.

(c) *Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số trên và $x=0$, $x=1$ được tính theo công thức $S=\int_0^1\left(x+x^2\right)\mathrm{d}x-\int_0^1\left(x+\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x$.*

Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi các đường $y=x+\sqrt{x}$, $y=x+x^2$, $x=0$, $x=1$ là:

$$S=\int_0^1\left|\left(x+\sqrt{x}\right)-\left(x+x^2\right)\right|\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1\left[\left(x+\sqrt{x}\right)-\left(x+x^2\right)\right]\mathrm{d}x \text{ (vì } x+\sqrt{x}\geq x+x^2\ \forall x\in[0;1]\text{).}$$

$$=\int_0^1\left(x+\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x-\int_0^1\left(x+x^2\right)\mathrm{d}x.$$

» Chọn SAI.

(d) *Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số trên và $x=0$, $x=1$ bằng $\frac{1}{3}$ đvdt.*

Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi các đường $y=x+\sqrt{x}$, $y=x+x^2$, $x=0$, $x=1$ là

$$S=\int_0^1\left(\sqrt{x}-x^2\right)\mathrm{d}x=\left.\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{x^3}{3}\right)\right|_0^1=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3} \text{ đvdt.}$$

» Chọn SAI.

» Câu 31. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=x^2+3$, $y=0$, $x=0$, $x=2$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Công thức tính diện tích hình phẳng (H) là: $S_{(H)}=\int_0^2\left(x^2+3\right)\mathrm{d}x$.		
(b)	Diện tích hình phẳng (H) bằng $\frac{26}{3}$.		

(c)	Công thức tính thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay hình phẳng (H) xung quanh trục Ox là: $V=\int_0^2\left(x^2+3\right)^2\mathrm{d}x$.		
(d)	Thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay hình phẳng (H) xung quanh trục Ox bằng $\dfrac{202}{5}$.		

Lời giải

(a) *Công thức tính diện tích hình phẳng (H) là: $S_{(H)}=\int_0^2\left(x^2+3\right)\mathrm{d}x$.*

Công thức tính diện tích hình phẳng (H) là: $S_{(H)}=\int_0^2\left(x^2+3\right)\mathrm{d}x$.

» Chọn ĐÚNG.

(b) *Diện tích hình phẳng (H) bằng $\dfrac{26}{3}$.*

Diện tích hình phẳng (H) là $S_{(H)}=\int_0^2\left(x^2+3\right)\mathrm{d}x=\dfrac{26}{3}$.

» Chọn ĐÚNG.

(c) *Công thức tính thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay hình phẳng (H) xung quanh trục Ox là: $V=\int_0^2\left(x^2+3\right)^2\mathrm{d}x$.*

Công thức tính thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay hình phẳng (H) xung quanh trục Ox là: $V=\pi\int_0^2\left(x^2+3\right)^2\mathrm{d}x$.

» Chọn SAI.

(d) *Thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay hình phẳng (H) xung quanh trục Ox bằng $\dfrac{202}{5}$.*

Thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay hình phẳng (H) xung quanh trục Ox là:

$$V=\pi\int_0^2\left(x^2+3\right)^2\mathrm{d}x=\frac{202\pi}{5}.$$

» Chọn ĐÚNG.

» Câu 32. Khối chỏm cầu có bán kính $R=5$ và chiều cao $h=1$ sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi cung tròn có phương trình $y=\sqrt{25-x^2}$, trục hoành và hai đường thẳng $x=4$, $x=5$ xung quanh trục Ox.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Khoảng cách từ tâm của khối cầu đến khối chỏm cầu bằng 3.		
(b)	Thể tích của khối chỏm cầu V_1 được tính theo công thức $V_1=\pi\int_4^5\left(25-x^2\right)\mathrm{d}x$.		

(c)	Thể tích của khối chỏm cầu $V_1=\dfrac{14\pi}{3}$.		
(d)	Gọi V_2 là thể tích của nửa khối cầu có bán kính bằng 5. Tỉ số thể tích $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{7}{125}$.		

Lời giải

(a) *Khoảng cách từ tâm của khối cầu đến khối chỏm cầu bằng* 3.

Khoảng cách từ tâm của khối cầu đến khối chỏm cầu bằng $5-1=4$.

» Chọn SAI.

(b) *Thể tích của khối chỏm cầu* V_1 *được tính theo công thức* $V_1=\pi\int_4^5\left(25-x^2\right)\mathrm{d}x$.

Thể tích của khối chỏm cầu được tính theo công thức $V_1=\pi\int_4^5\sqrt{25-x^2}^{\,2}\mathrm{d}x=\pi\int_4^5\left(25-x^2\right)\mathrm{d}x$

» Chọn ĐÚNG.

(c) *Thể tích của khối chỏm cầu* $V_1=\dfrac{14\pi}{3}$.

Ta có thể tích khối chỏm cầu là $V=\pi\int_4^5\left(25-x^2\right)\mathrm{d}x=\pi\left(25x-\dfrac{x^3}{3}\right)\Bigg|_4^5=\dfrac{14\pi}{3}$.

» Chọn ĐÚNG.

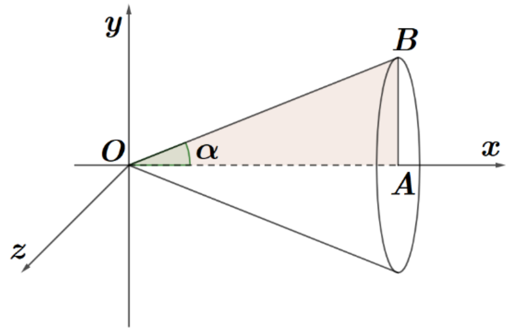
(d) *Gọi* V_2 *là thể tích của nửa khối cầu có bán kính bằng 5. Tỉ số thể tích* $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{7}{125}$.

Gọi V_2 là thể tích của nửa khối cầu có bán kính bằng 5. Ta có $V_2=\dfrac{1}{2}.\dfrac{4}{3}\pi.5^3=\dfrac{250}{3}\pi$.

Suy ra $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{\frac{14}{3}\pi}{\frac{250}{3}\pi}=\dfrac{7}{125}$.

» Chọn ĐÚNG.

» Câu 33. Cho tam giác vuông OAB có cạnh $OA=a$ nằm trên tục Ox và $\widehat{AOB}=\alpha\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$. Gọi β là khối tròn xoay sinh ra khi quay miền tam giác OAB xung quanh trục Ox.



	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Khi $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$ thì thể tích V của khối β là $\dfrac{\pi a^3}{3}$ (đvtt).		

(b)	Khi $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$ thì thể tích V của khối β là $\dfrac{\pi a^3}{9}$ (đvtt).		
(c)	Khi thể tích V của khối β là $\dfrac{4\pi a^3}{3}$ thì giá trị $\cos\alpha < \dfrac{1}{2}$.		
(d)	Khi $\tan\alpha = \cot\alpha$ thì thể tích V của khối β là $\dfrac{\pi a^3}{3}$.		

Lời giải

(a) *Khi $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$ thì thể tích V của khối β là $\dfrac{\pi a^3}{3}$ (đvtt).*

Do OB đi qua gốc tọa độ và tạo với Ox một góc $\dfrac{\pi}{4}$ nên $OB: y = \tan\dfrac{\pi}{4}x = x$.

Khi đó, thể tích của khối β theo $V = \pi\int_0^a x^2 dx = \left.\dfrac{\pi x^3}{3}\right|_0^a = \dfrac{\pi a^3}{3}$ (đvtt).

» Chọn ĐÚNG.

(b) *Khi $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$ thì thể tích V của khối β là $\dfrac{\pi a^3}{9}$ (đvtt).*

Do OB đi qua gốc tọa độ và tạo với Ox một góc $\dfrac{\pi}{6}$ nên $OB: y = \tan\dfrac{\pi}{6}x = \dfrac{x}{\sqrt{3}}$.

Khi đó, thể tích của khối β theo $V = \pi\int_0^a \left(\dfrac{x}{\sqrt{3}}\right)^2 dx = \pi\int_0^a \dfrac{x^2}{3}dx = \left.\dfrac{\pi x^3}{9}\right|_0^a = \dfrac{\pi a^3}{9}$ (đvtt).

» Chọn ĐÚNG.

(c) *Khi thể tích V của khối β là $\dfrac{4\pi a^3}{3}$ thì giá trị $\cos\alpha < \dfrac{1}{2}$.*

Do OB đi qua gốc tọa độ và tạo với Ox một góc α nên $OB: y = \tan\alpha.x$.

Khi đó, thể tích của khối β theo $V = \pi\int_0^a (\tan\alpha.x)^2 dx = \left.\dfrac{\pi\tan^2\alpha.x^3}{3}\right|_0^a = \dfrac{\pi\tan^2\alpha.a^3}{3}$ (đvtt).

Do $V = \dfrac{4\pi a^3}{3} \Leftrightarrow \dfrac{\pi\tan^2\alpha.a^3}{3} = \dfrac{4\pi a^3}{3} \Leftrightarrow \tan^2\alpha = 4 \Rightarrow \dfrac{1}{\cos^2\alpha} = \tan^2\alpha + 1 = 5 \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{\pm 1}{\sqrt{5}}$.

Mặt khác $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ nên $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

» Chọn ĐÚNG.

(d) *Khi $\tan\alpha = \cot\alpha$ thì thể tích V của khối β là $\dfrac{\pi a^3}{3}$.*

Ta có: Do OB đi qua gốc tọa độ và tạo với Ox một góc α nên $OB: y = \tan\alpha.x$.

Khi đó, thể tích của khối β theo $V = \pi\int_0^a (\tan\alpha.x)^2 dx = \left.\dfrac{\pi\tan^2\alpha.x^3}{3}\right|_0^a = \dfrac{\pi\tan^2\alpha.a^3}{3}$ (đvtt).

Do $\tan\alpha = \cot\alpha \Rightarrow \tan^2\alpha = \cot\alpha.\tan\alpha = 1 \Leftrightarrow \tan\alpha = \pm 1$.

Mặt khác $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ nên $\tan\alpha = 1 \Rightarrow V = \dfrac{\pi\tan^2\alpha.a^3}{3} = \dfrac{\pi.a^3}{3}$ (đvtt).

» Chọn ĐÚNG.

» Câu 34. Các nhà kinh tế sử dụng đường cong Lorenz để minh họa sự phân phối thu nhập trong một quốc gia. Gọi x là đại diện cho phần trăm số gia đình trong một quốc gia và y là phần trăm tổng thu nhập, mô hình $y = x$ sẽ đại diện cho một quốc gia mà các gia đình có thu nhập như nhau. Đường cong Lorenz $y = f(x)$, biểu thị sự phân phối thu nhập thực tế. Diện tích giữa hai mô hình này, với $0 \le x \le 100$, biểu thị "sự bất bình đẳng về thu nhập" của một quốc gia. Năm 2005, đường cong Lorenz của Hoa Kỳ có thể được mô hình hóa bởi hàm số

$$y = \left(0,00061x^2 + 0,0218x + 1,723\right)^2, 0 \le x \le 100,$$

Trong đó x được tính từ các gia đình nghèo nhất đến giàu có nhất (*Theo R.Larson, Brief Calculus: An Applied Approach, 8th edition, Cengage Learning, 2009*)

Xét tính đúng/sai của các khẳng định sau:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Tính theo thứ tự từ các gia đình nghèo nhất đến giàu nhất, tổng thu nhập thực tế của 60% các gia đình đầu tiên chiếm chưa đến 30% so với tổng thu nhập của toàn bộ các gia đình.		
(b)	Nếu sắp xếp các gia đình theo thứ tự từ nghèo nhất đến giàu nhất, rồi chia thành 10 nhóm bằng nhau từ 1 đến 10, tổng thu nhập của các gia đình trong nhóm 3 chiếm khoảng $8,56\%$ tổng thu nhập của toàn bộ các gia đình.		
(c)	Sự bất bình đẳng về thu nhập của Hoa Kì năm 2005 được xác định bởi công thức: $\int_0^{100}\left[x - \left(0,00061x^2 + 0,0218x + 1,723\right)^2\right]dx$		
(d)	Sự bất bình đẳng về thu nhập của Hoa Kỳ năm 2005 đã vượt quá 2000.		

Lời giải

***(a)** Tính theo thứ tự từ các gia đình nghèo nhất đến giàu nhất, tổng thu nhập thực tế của 60% các gia đình đầu tiên chiếm chưa đến 30% so với tổng thu nhập của toàn bộ các gia đình.*

Tính theo thứ tự từ các gia đình nghèo nhất đến giàu nhất, tổng thu nhập của 60% các gia đình của đầu tiên chiếm tỷ lệ trong tổng thu nhập là: $f(60) = 27,321529(\%)$.

» Chọn ĐÚNG.

***(b)** Nếu sắp xếp các gia đình theo thứ tự từ nghèo nhất đến giàu nhất, rồi chia thành 10 nhóm bằng nhau từ 1 đến 10, tổng thu nhập của các gia đình trong nhóm 3 chiếm khoảng $8,56\%$ tổng thu nhập của toàn bộ các gia đình.*

Nếu sắp xếp các gia đình theo thứ tự từ nghèo đến giàu, rồi chia thành 10 nhóm bằng nhau, mỗi nhóm chiếm 10% số gia đình của Hoa Kỳ.

Tổng thu nhập của 30% số gia đình (là các gia đình thuộc nhóm $1,2,3$) chiếm tỷ lệ trong tổng thu nhập của tất cả các gia đình là:

$f(30) = 8,561476\ (\%)$.

Tổng thu nhập của 20% số gia đình (là các gia đình thuộc nhóm $1,2$) chiếm tỷ lệ trong tổng thu nhập của tất cả các gia đình là:

$f(20) = 5,774409\ (\%)$.

$\Rightarrow$ Tỷ lệ của tổng thu nhập các gia đình nhóm thứ 3 so với toàn bộ các gia đình là: $f(30)-f(20)=2,787067(\%)$.

» Chọn SAI.

(c) *Sự bất bình đẳng về thu nhập của Hoa Kì năm 2005 được xác định bởi công thức:* $\int_0^{100}\left[x-\left(0,00061x^2+0,0218x+1,723\right)^2\right]\mathrm{d}x$.

Sự bất bình đẳng về thu nhập của Hoa Kì vào năm 2005 là diện tích hình phẳng S giới hạn bởi hai đồ thị:

$$\begin{cases} y=x \\ y=\left(0,00061x^2+0,0218+1,723\right)^2 \\ x=0; x=100 \end{cases} \Rightarrow S=\int_0^{100}\left|\left(0,00061x^2+0,0218x+1,723\right)^2-x\right|\mathrm{d}x.$$

Cách 1:

Sử dụng máy tính cầm tay, ta thấy phương trình $\left(0,00061x^2+0,0218x+1,723\right)^2-x=0$ có hai ngiệm $x=a;x=b$ $(a<b)$ thuộc $[0;100]$.

Xét dấu biểu thức $g(x)=\left(0,00061x^2+0,0218x+1,723\right)^2-x$ ta được:

x	0		a		b		100
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Suy ra: $S=\int_0^{100}|g(x)|\mathrm{d}x=\int_0^{a}|g(x)|\mathrm{d}x+\int_a^{b}|g(x)|\mathrm{d}x+\int_b^{100}|g(x)|\mathrm{d}x$.

$=\left|\int_0^{a}g(x)\mathrm{d}x\right|+\left|\int_a^{b}g(x)\mathrm{d}x\right|+\left|\int_b^{100}g(x)\mathrm{d}x\right|$.

$=\int_0^{a}g(x)\mathrm{d}x-\int_a^{b}g(x)\mathrm{d}x+\int_b^{100}g(x)\mathrm{d}x$.

Cách 2:

Sử dụng máy tính cầm tay ta được: $S=\int_0^{100}\left|\left(0,00061x^2+0,0218x+1,723\right)^2-x\right|\mathrm{d}x\approx 2068,9$.

Kiểm tra phép tính của đề bài, ta có: $\int_0^{100}\left[x-\left(0,00061x^2+0,0218x+1,723\right)^2\right]\mathrm{d}x=2059,3131$.

» Chọn SAI.

(d) *Sự bất bình đẳng về thu nhập của Hoa Kỳ năm 2005 đã vượt quá 2000.*

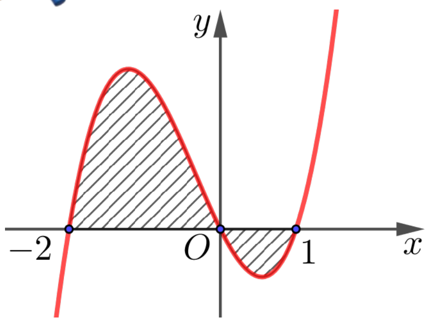
Sự bất bình đẳng thu nhập của Hoa Kỳ năm 2005 là:

$S=\int_0^{100}\left|\left(0,00061x^2+0,0218x+1,723\right)^2-x\right|\mathrm{d}x\approx 2068,9$.

» Chọn ĐÚNG.

C. *Câu hỏi – Trả lời ngắn*

» Câu 35. Đồ thị trong hình dưới đây là của hàm số $y=f(x)$.



Biết $\int_{-2}^{0} f(x)\mathrm{d}x = 3; \int_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x = -1$. Tính diện tích phần hình phẳng tô đậm trong hình.

Lời giải

✓ *Trả lời: 4*

Từ đồ thị ta có $f(x) \ge 0, \forall x \in [-2;0]$ và $f(x) \le 0, \forall x \in [0\,;1]$.

Do đó $S = \int_{-2}^{1} |f(x)|\mathrm{d}x = \int_{-2}^{1} |f(x)|\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} |f(x)|\mathrm{d}x = \int_{-2}^{0} f(x)\mathrm{d}x - \int_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x$

$S = 3 - (-1) = 4$.

» **Câu 36.** Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^3 + 2x + 1$, trục hoành, $x = 1$ và $x = 2$.

Lời giải

✓ *Trả lời: 7,75*

Diện tích hình phẳng cần tìm là $S = \int_{1}^{2} |x^3 + 2x + 1|\mathrm{d}x = \frac{31}{4} = 7{,}75$.

» **Câu 37.** Thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường: $y = 3x + x^2$, $y = 0; x = 0; x = 3$ quanh trục Ox bằng bao nhiêu (*làm tròn đến hàng đơn vị*)?

Lời giải

✓ *Trả lời: 789*

$V = \pi\int_{0}^{3} (3x + x^2)^2\,\mathrm{d}x = \frac{2511\pi}{10} \approx 789$.

» **Câu 38.** Khối chỏm cầu có bán kính $R = 3$ và chiều cao $h = \frac{3}{2}$ sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi cung tròn có phương trình $y = \sqrt{9 - x^2}$, trục hoành và hai đường thẳng $x = \frac{3}{2}$, $x = 3$ xung quanh trục Ox. Tính thể tích khối chỏm cầu này (làm tròn kết quả đến hàng phần chục).

Lời giải

✓ *Trả lời: 17,7*

Ta có thể tích khối chỏm cầu là $V = \pi\int_{\frac{3}{2}}^{3} (9 - x^2)\mathrm{d}x = \pi\left(9x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{\frac{3}{2}}^{3} = \frac{45\pi}{8} \approx 17{,}7$.

» **Câu 39.** Tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường: $y = 8 - x^2$, $y = 3x^2$, $x = -\sqrt{2}$, $x = \sqrt{2}$ (*kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ 2*)

Lời giải

✓ *Trả lời: 15,08*

Ta có: $8-x^2=3x^2 \Leftrightarrow 8-4x^2=0 \Leftrightarrow x=-\sqrt{2}$ hoặc $x=\sqrt{2}$.

Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=8-x^2$, $y=3x^2$, $x=-\sqrt{2}$, $x=\sqrt{2}$ là:

$$S=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\left|8-x^2-3x^2\right|dx=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\left(8-4x^2\right)dx=\left.\left(8x-\frac{4x^3}{3}\right)\right|_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}=\frac{32\sqrt{2}}{3}\approx 15,08 \text{ (đvdt)}.$$

» **Câu 40.** Tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường: $y=\sqrt{2x}$, $y=\frac{x^2}{2}$, $x=0$, $x=2$ *(kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ 2)*

Lời giải

✓ *Trả lời: 1,33*

Ta có: $\frac{x^2}{2}=\sqrt{2x} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ \frac{x^4}{4}=2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ x^4-8x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$.

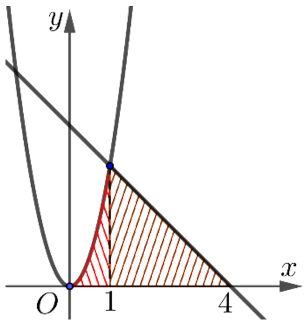
Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{2x}$, $y=\frac{x^2}{2}$, $x=0$, $x=2$ là:

$$S=\int_0^2\left|\frac{x^2}{2}-\sqrt{2x}\right|dx=\int_0^2\left(\sqrt{2x}-\frac{x^2}{2}\right)dx=\left.\left[\frac{1}{3}(2x)^{\frac{3}{2}}-\frac{x^3}{6}\right]\right|_0^2=\frac{1}{3}.4^{\frac{3}{2}}-\frac{2^3}{6}=\frac{4}{3} \text{ (đvdt)}.$$

» **Câu 41.** Gọi (H) là phần hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị của các hàm số $y=3x^2$, $y=4-x$ và trục hoành. Diện tích của (H) là bằng bao nhiêu?

Lời giải

✓ *Trả lời: 5,5*



$(H):\begin{cases} y=3x^2 \\ y=4-x \\ y=0 \end{cases}$

Xét phương trình hoành độ giao điểm:

* $4-x=0 \Leftrightarrow x=4$
* $3x^2=0 \Leftrightarrow x=0$
* $3x^2=4-x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \text{ (t/m)} \\ x=\frac{-4}{3} \text{ (Loai)} \end{array}\right.$

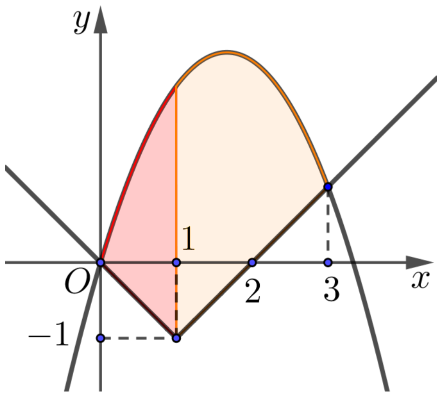
Diện tích hình phẳng $S_{(H)}=\int_0^1 3x^2dx+\int_1^4(4-x)dx=\left.x^3\right|_0^1+\left.\left(4x-\frac{x^2}{2}\right)\right|_1^4=\frac{11}{2}=5,5$.

» **Câu 42.** Cho (H) là hình phẳng được tô đậm trong hình vẽ và được giới hạn bởi các đường có phương trình $y=\frac{10}{3}x-x^2$, $y=\begin{cases}-x & \text{khi } x\le 1\\ x-2 & \text{khi } x>1\end{cases}$. Diện tích của (H) bằng bao nhiêu.

Lời giải

✓ ***Trả lời: 6,5***

Ta có



Xét: $y=\begin{cases}-x & \text{khi } x\le 1\\ x-2 & \text{khi } x>1\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 1^+} y=\lim\limits_{x\to 1^+}(x-2)=-1$ và $y(1)=-1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^+} y=y(1)$. Do đó hàm số liên tục tại $x=1$.

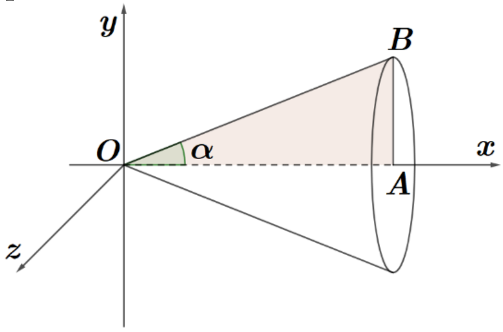
Diện tích hình phẳng cần tính là:

$$S=\int_0^1\left(\frac{10}{3}x-x^2+x\right)\mathrm{d}x+\int_1^3\left(\frac{10}{3}x-x^2-x+2\right)\mathrm{d}x.$$

$$\Leftrightarrow S=\int_0^1\left(\frac{13}{3}x-x^2\right)\mathrm{d}x+\int_1^3\left(\frac{7}{3}x-x^2+2\right)\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow S=\left.\left(\frac{13}{6}x^2-\frac{x^3}{3}\right)\right|_0^1+\left.\left(\frac{7}{6}x^2-\frac{x^3}{3}+2x\right)\right|_1^3=\frac{13}{2}=6,5.$$

» **Câu 43.** Cho tam giác vuông OAB có cạnh OA nằm trên trục Ox và $\widehat{AOB}=\alpha\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$ và $B(a;b)$ với a, b là các số thực thỏa $a^2+b^2=1$. Gọi β là khối tròn xoay sinh ra khi quay miền tam giác OAB xung quanh trục Ox.



Tính giá trị $\tan\alpha$ khi thể tích của khối β đạt giá trị lớn nhất. *Làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ 2.*

Lời giải

✓ ***Trả lời: 1,41***

Đáp số: $\sqrt{2}$.

Do OB đi qua gốc tọa độ nên ta đặt $OB: y = kx$ với k là số thực dương.

Do OB đi qua $B(a;b) \Rightarrow OB: y = \frac{b}{a}x$ và $\tan\alpha = \frac{b}{a}$.

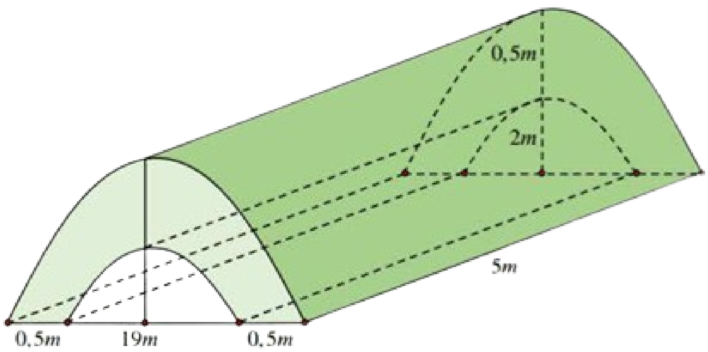
Khi đó, $V = \pi\int_0^a \left(\frac{b}{a}x\right)^2 \mathrm{d}x = \pi\int_0^a \frac{b^2}{a^2}x^2\mathrm{d}x = \left.\frac{\pi b^2x^3}{3a^2}\right|_0^a = \frac{\pi}{3}b^2a$.

Áp dụng bất đẳng thức Am – Gm:

$$V^2 = \frac{\pi^2}{9}b^4a^2 = \frac{\pi^2}{18}b^2b^2 2a^2 \le \frac{\pi^2}{18}\frac{\left(b^2+b^2+2a^2\right)^3}{27} = \frac{4\pi^2}{243} \Rightarrow V \le \frac{2\pi\sqrt{3}}{27}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $b^2 = 2a^2 \Rightarrow \frac{b}{a} = \tan\alpha = \sqrt{2}$.

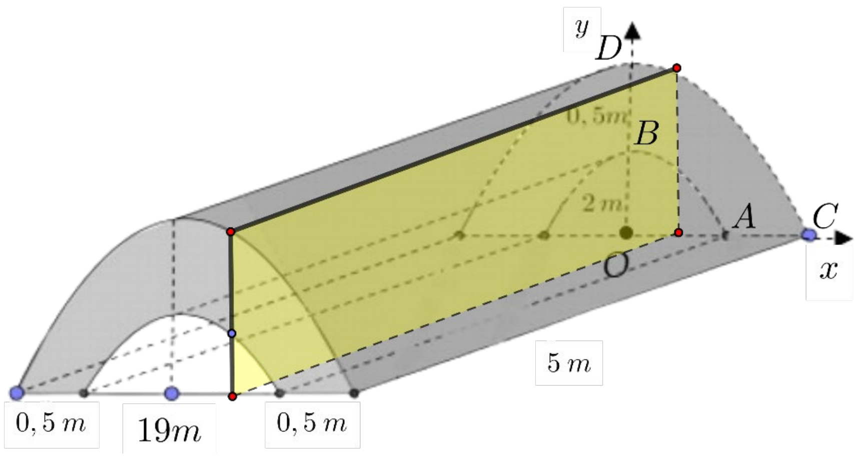
» Câu 44. Trong chương trình nông thôn mới, tại một xã Y có xây một cây cầu bằng bê tông như hình vẽ. Tính thể tích khối bê tông để đổ đủ cây cầu. (Đường cong trong hình vẽ là các đường Parabol)



Lời giải

✓ ***Trả lời: 40***

Chọn hệ trục Oxy như hình vẽ.



Gọi $(P_1): y = a_1x^2 + b_1$ là Parabol đi qua hai điểm $A\left(\frac{19}{2};0\right), B(0;2)$

Nên ta có hệ phương trình sau: $\begin{cases} 0 = a.\left(\frac{19}{2}\right)^2 + 2 \\ 2 = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = -\frac{8}{361} \\ b_1 = 2 \end{cases} \Rightarrow (P_1): y = -\frac{8}{361}x^2 + 2$.

Gọi $(P_2): y = a_2x^2 + b_2$ là Parabol đi qua hai điểm $C(10;0), D\left(0;\frac{5}{2}\right)$

Nên ta có hệ phương trình sau: $\begin{cases} 0 = a_2.(10)^2 + \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} = b_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_2 = -\frac{1}{40} \\ b_2 = \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow (P_2): y = -\frac{1}{40}x^2 + \frac{5}{2}$.

Gọi mặt phẳng (P) vuông góc với trục Ox, thiết diện tạo bởi mặt phẳng (P) với khối bêtông là hình chữ nhật có chiều dài bằng 5, chiều rộng bằng

$$h(x) = \begin{cases} \left(-\frac{1}{40}x^2 + \frac{5}{2}\right) - \left(-\frac{8}{361}x^2 + 2\right) = \frac{-41}{14440}x^2 + \frac{1}{2} & , \quad -9,5 \le x \le 9,5 \\ -\frac{1}{40}x^2 + \frac{5}{2} & , \quad x \in [-10;-9,5] \cup [9,5;10] \end{cases}.$$

Suy ra diện tích thiết diện là $S(x) = \begin{cases} 5\left(\frac{-41}{14440}x^2 + \frac{1}{2}\right) & , \quad -9,5 \le x \le 9,5 \\ 5\left(-\frac{1}{40}x^2 + \frac{5}{2}\right) & , \quad x \in [-10;-9,5] \cup [9,5;10] \end{cases}$.

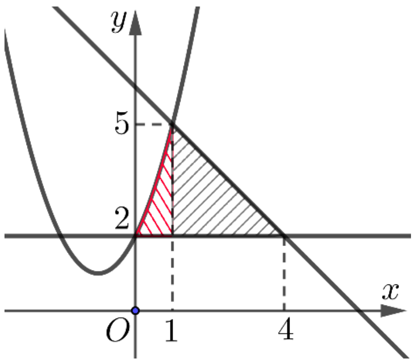
Do đó $V = \int_{-10}^{10} S(x)\,\mathrm{d}x$.

Vậy $V = \int_{-10}^{-9,5} 5\cdot\left(\frac{-1}{40}x^2 + \frac{5}{2}\right)\mathrm{d}x + \int_{-9,5}^{9,5} 5\cdot\left(\frac{-41}{14440}x^2 + \frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x + \int_{9,5}^{10} 5\cdot\left(\frac{-1}{40}x^2 + \frac{5}{2}\right)\mathrm{d}x = 40$.

» Câu 45. Cho hình phẳng (D) được giới hạn bởi các đường $y = x^2 + 2x + 2;\ y = 6 - x;\ y = 2$ và (D) nằm ngoài Parabol $y = x^2 + 2x + 2$. Khi cho (D) quay quanh trục Ox, ta nhận được vật thể tròn xoay có thể tích $V = \frac{a\pi}{b}$, trong đó a, b là các số nguyên dương . Giá trị biểu thức $P = a - 2b^2$ bằng bao nhiêu.

Lời giải

✓ Trả lời: 73



Vẽ các đường $y = x^2 + 2x + 2;\ y = 6 - x;\ y = 2$.

Dựa vào hình vẽ ta có:

$$V = \pi\int_0^1 \left|\left(x^2 + 2x + 2\right)^2 - 2^2\right|\mathrm{d}x + \pi\int_1^4 \left|(6 - x)^2 - 2^2\right|\mathrm{d}x = \frac{523\pi}{15} \Rightarrow a = 523, b = 15$$

Vậy $P = 523 - 2.15^2 = 73$.